Perspectiva: fundamentos y aplicaciones

Ricardo Bartolomé Ramírez



Axonométrico
Caballera
Cónico

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

PERSPECTIVA
Fundamentos y Aplicaciones

MATERIAL DIDÁCTICO
Ingenierías
nº 17

Ricardo Bartolomé Ramírez

PERSPECTIVA
Fundamentos y Aplicaciones
Axonométrico. Caballera. Cónico

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Servicio de Publicaciones



publicaciones.unirioja.es

E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN: 978-84-694-0869-8

PRÓLOGO

Los sistemas de medida, como son el Diédrico y el de Planos Acotados, aún siendo los empleados con mayor frecuencia en Dibujo Técnico Industrial y Dibujo Topográfico respectivamente; presentan como principial inconveniente el de ser poco descriptivos.

Este inconveniente no se produce en los llamados sistemas representativos, Axónométrico, Caballera (Axonométrico Oblicuo) y Cónico, siendo la ventaja fundamental de las representaciones realizados con ellos.

En el presente tratado se han incluido estos tres sistemas de perspectiva, realizando en todos ellos el estudio de los fundamentos y métodos resolutivos y las aplicaciones prácticas correspondientes. Se hace incidencia especial en el Dibujo Industrial como aplicación de los sistemas axonométricos y en todos ellos se ha procurado facilitar los métodos mas intuitivos de resolución.

Se ha incidido con mayor profusión en la parte gráfica que en la escrita, por estar enfocado este trabajo fundamentalmente al seguimiento de las clases por parte de los alumnos, en las que debe realizarse la explicación exhaustiva que corresponda.

Se han de poseer, para abordar con mayor probabilldad de éxito su aprendizaje, los suficientes conocimientos de Geometría Métrica del plano y del espacio, y que sirvieron para el estudio del Sistema Diédrico. Por ser todos los Sistemas de Representación compatibles y complementarios se han incluido los métodos para pasar datos y soluciones de unos a otros, estableciendo las correspondencias necesarias.

Espero que este trabajo sirva de ayuda a los interesados en estos conocimientos, para comprenderlos y asimilarlos, siendo por otra parte fundamental para la formación técnica y de gran aplicación práctica en la actividad profesional de los técnicos.

Ricardo Bartolomé Ramírez
Profesor del Departamento de
Ingeniería Mecánica.
Universidad de La Rioja

Parte Primera

SISTEMA DE PERSPECTIVA AXIONOMÉTRICA

1. INTRODUCCIÓN

Consideremos en el espacio un triedro trirrectángulo sobre el que realizaremos las proyecciones previas de los elementos del espacio. El triedro nos proporciona los planos coordenados, los cuales al cortarse dividen al espacio en ocho triedros trirrectángulos.

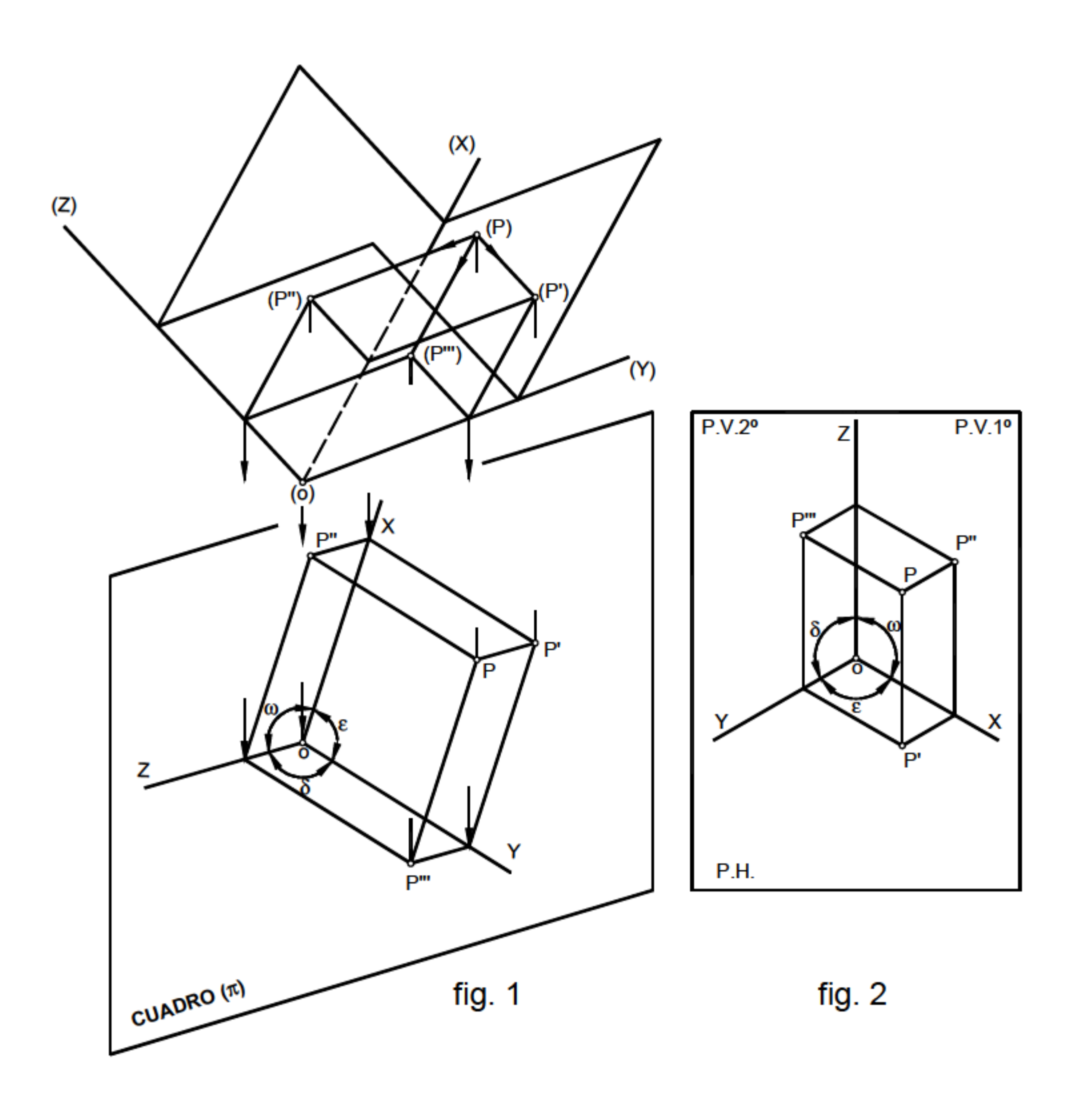


fig. 1 fig. 2

2. FUNDAMENTOS

Tomemos un punto cualquiera (P) del espacio y proyectémosle sobre cada una de las caras del triedro (X)(0)(Y), (X)(0)(Z) y (Z)(0)(Y); obteniendo así las proyecciones previas (P')(P'')(P''').

Si tomamos un plano, que puede ser cualquiera, con tal de que no contenga a un eje, o que no sea coincidente con una de las caras del triedro; y lo consideramos como plano del dibujo (π), y sobre él proyectamos ortogonalmente obtendremos las proyecciones definitivas axonométricas ortogonales X, Y, Z de los ejes y P, P', P'', P''' del punto (fig.1).

Los ejes ya en proyección, forman unos ángulos entre sí que hemos designado por ε, ω, δ correspondientes a XOY, XOZ y ZOY respectivamente, y cuya suma de valores será de 360 grados.

El punto P es la proyección directa ortogonal del punto del espacio sobre el cuadro (π) y constituye realmente la perspectiva axonométrica, es decir, cuando representamos un cuerpo o elemento en este sistema, lo que dibujamos es su proyección directa o perspectiva.

Cuando la proyección se realiza oblicuamente sobre el cuadro, el sistema se llama Axonométrico clinogonal, y su estudio, basado en el teorema de Polkhe, no tiene más interés que el puramente teórico, no empleándose en la práctica del dibujo industrial.

El punto P está en proyección directa a las distancias x, y, z de los planos ZOY, XOZ, XOY respectivamente, siendo éstas sus coordenadas cartesianas ortogonales. De la figura (2) deducimos que dadas dos proyecciones de las cuatro que tiene el punto, se pueden hallar las otras dos, o lo que es lo mismo, un punto queda definido por dos de sus proyecciones.

3. CLASIFICACIÓN DE LAS AXONOMETRÍAS

Hasta ahora hemos fijado el plano del cuadro en una posición cualquiera con referencia a los ejes del sistema.

Supongamos un cubo con una diagonal vertical con respecto al cuadro, las aristas que concurren en el vértice inferior de dicha diagonal son los ejes de un sistema axonométrico que recibe el nombre particular de ISOMETRICO, por la igualdad de medida de los ángulos que forman los tres ejes con el cuadro, y por tanto los planos coordenados cumplen la misma condición.

En la figura (3) se verificará que $\alpha=\beta=\gamma$.

(0)(L)cosα = OL, que es el valor de la proyección.

Los ejes isométricos se proyectan sobre el cuadro formando ángulos $\varepsilon=\omega=\delta=120^\circ$

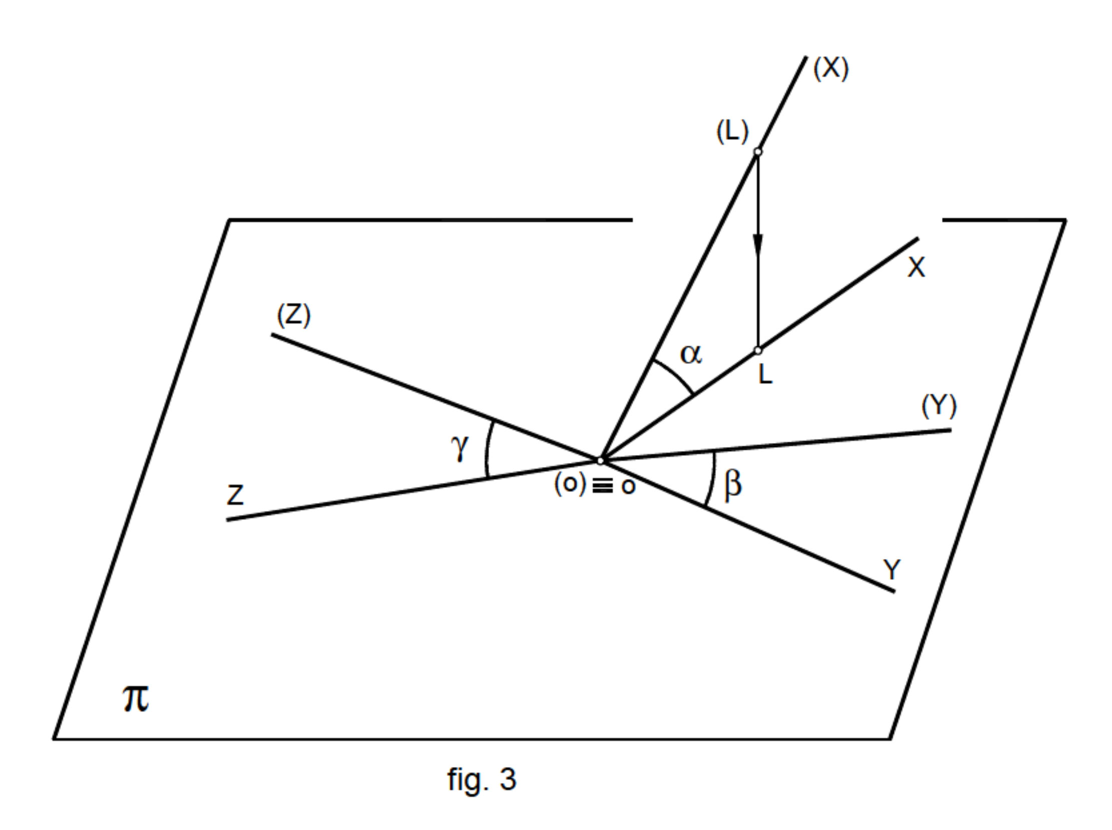


fig. 3

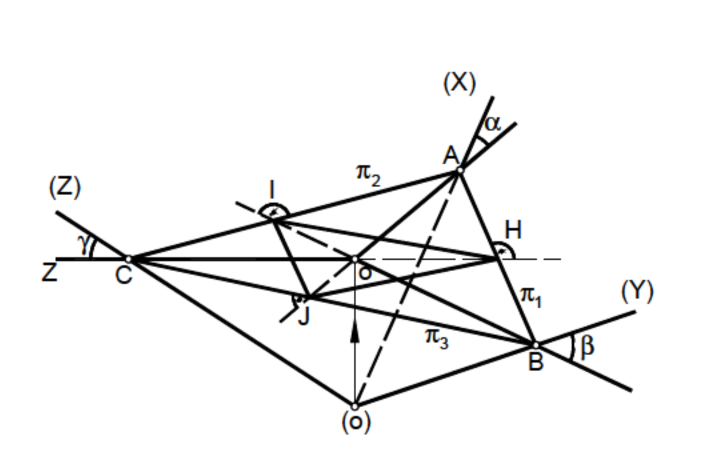
Si solamente son dos los ángulos iguales formados por los ejes con el cuadro, el sistema se denomina MONODIMÉTRICO O DIMÉTRICO.

En este caso habrá dos coeficientes de reducción, uno para los ejes que forman el mismo ángulo, y otro para el tercer eje.

Puede suceder que $\alpha=\beta$ distinto de γ, α distinto de $\beta=\gamma$, $\alpha=\gamma$ distinto de β. Cuando los tres ángulos son distintos el sistema recibe el nombre de ANISOMETRICO o TRIMETRICO, tendremos que utilizar por tanto tres coeficientes de reducción, uno para cada eje. En la norma UNE 1031 aparecen los valores normalizados para los ángulos de los ejes.

4. TRIÁNGULOS DE LAS TRAZAS

El triángulo ABC de trazas del plano del cuadro con el triedro se denomina, TRIÁNGULO FUNDAMENTAL, su conocimiento es dato suficiente para que quede definido un sistema axonométrico. Los ejes se proyectan según las alturas de dicho triángulo; los pies de las alturas, puntos H, J, I, nos definen el TRIÁNGULO ÓRTICO del ABC, siendo los ejes, como luego veremos, las bisectrices de los ángulos de dicho triángulo.



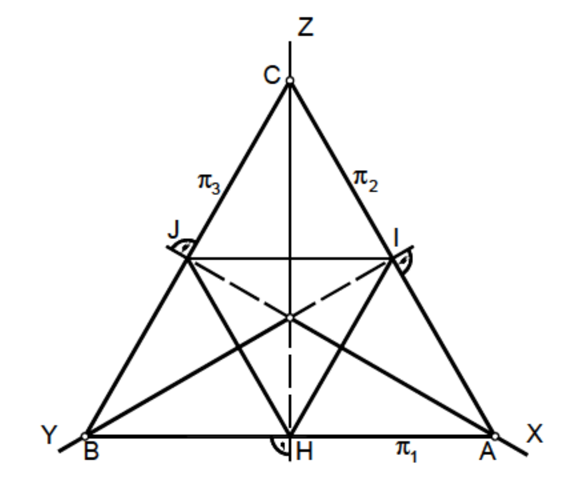
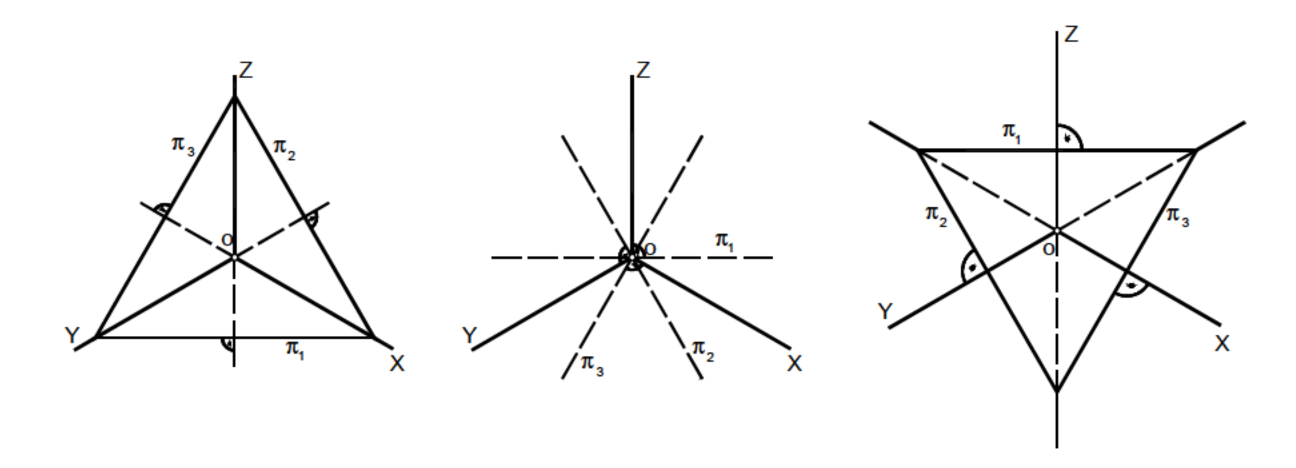


fig. 4

Si trasladamos paralelamente el plano del cuadro se obtienen triángulos de trazas semejantes entre sí, por lo que es indiferente tomar uno u otro.

Con respecto al origen O el triángulo de trazas puede ocupar tres posiciones características: por encima, conteniéndolo y por debajo, dando lugar a las representaciones de las figuras siguientes.



Basándonos en el TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES que dice: Si una recta y un plano son perpendiculares en el espacio, elegido un plano de proyección, la proyección de la recta y la traza del plano con el de proyección son perpendiculares.

Podremos demostrar lo que antes establecíamos: Los ejes axonómetricos son perpendiculares a los lados del triángulo de trazas o fundamental.

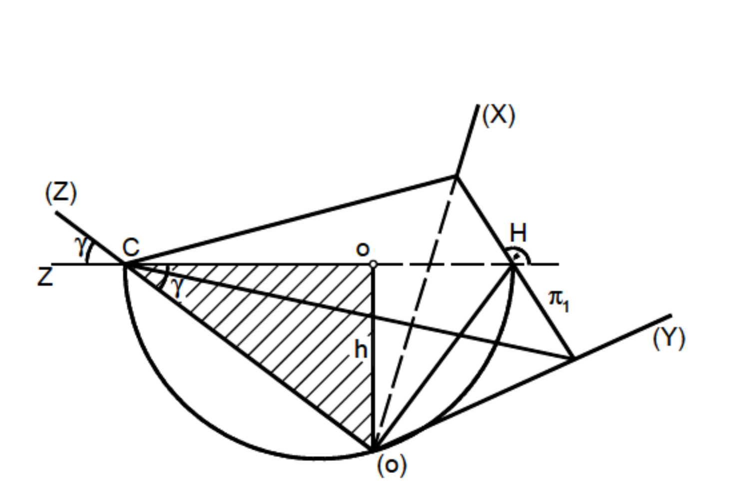
Denominando a las trazas AB, BC y AC por π_1, π_2, π_3 respectivamente, se cumplirá que

X será perpendicular a π_3
Y será perpendicular a π_2
Z será perpendicular a π_1

El triángulo de trazas es siempre un triángulo acutángulo, por lo que todo triángulo acutángulo determina una axonometría.

Es importante saber determinar la distancia al origen del plano del cuadro, por su utilización en abatimientos y ángulos.

Dicha distancia es altura del triángulo rectángulo C(O)H, siendo CH su hipotenusa, por lo que el punto (O) se encontrará sobre el arco de diámetro CH, que en el espacio es perpendicular al cuadro por lo que será necesario en proyecciones, recurrir a un abatimiento para poder apreciar su verdadera magnitud, operación que realizamos en la segunda parte de la figura (5).



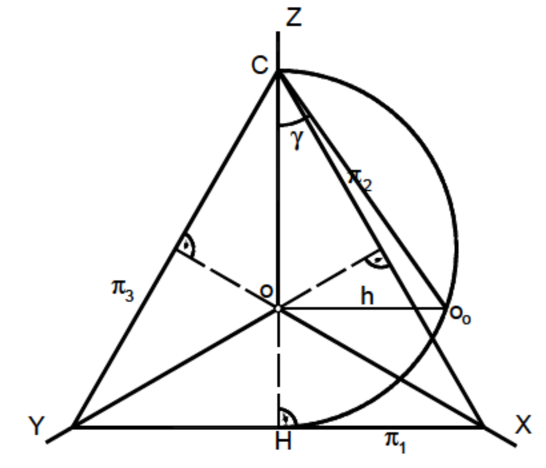


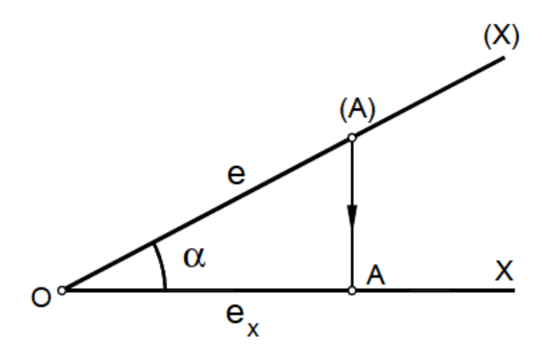
fig. 5

5. COEFICIENTES DE REDUCCIÓN

Como los ejes coordenados forman ángulos α, β, γ con los ejes axonométricos, la proyección de una magnitud perteneciente a alguno de ellos, se verá afectada por una reducción equivalente al coseno del ángulo correspondiente.

En la figura O(A)cosα = OA, por lo que la verdadera magnitud a proyectar -e- se convierte en e_x, pudiendo establecer que $e_x = e \cdot \cos\alpha$. Para los demás ejes, podremos establecer que $e_y = e \cdot \cos\beta$ y $e_z = e \cdot \cos\gamma$.

$\cos\alpha = \mu_x$, $\cos\beta = \mu_y$, $\cos\gamma = \mu_z$, siendo por tanto μ_x, μ_y, μ_z los valores de los coeficientes de reducción, que por otra parte son constantes para una axonometría determinada.



Dado un sistema axonométrico de ejes, podremos determinar los coeficientes de reducción, así como los valores de los ángulos α, β y γ cuyo trazado es similar al realizado en la (fig. 5), en la que se obtenía el valor de γ, y que ahora realizamos también para los otros dos en la (fig.6).

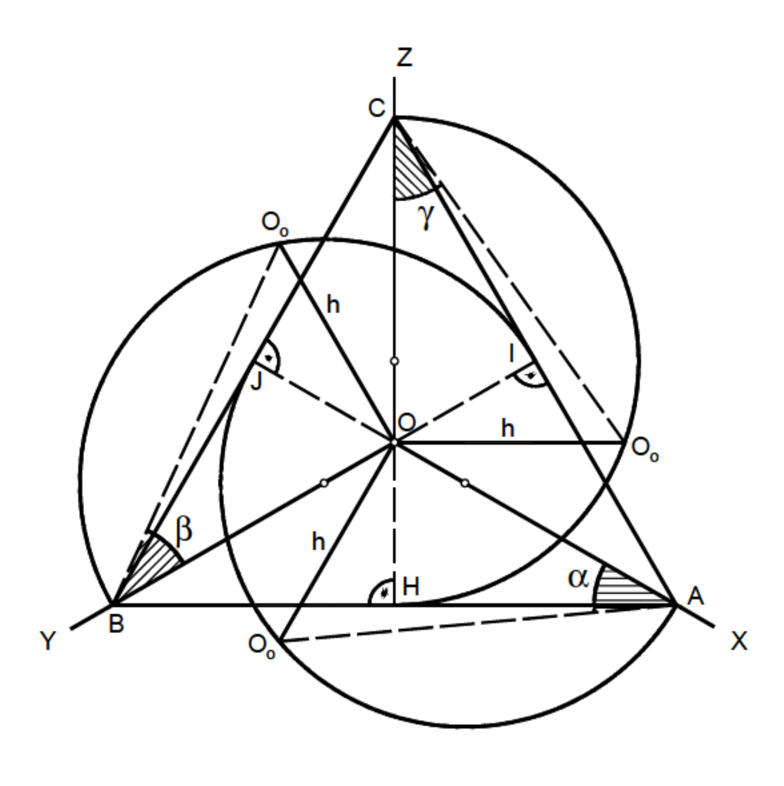


fig. 6

Si abatimos sobre el cuadro las caras limitadas del triedro AOB, AOC y BOC, podremos establecer las relaciones existentes entre proyecciones y verdaderas magnitudes, tanto en forma como en dimensión, pudiendo establecer por tanto una fórmula determinativa de valores (fig.7).

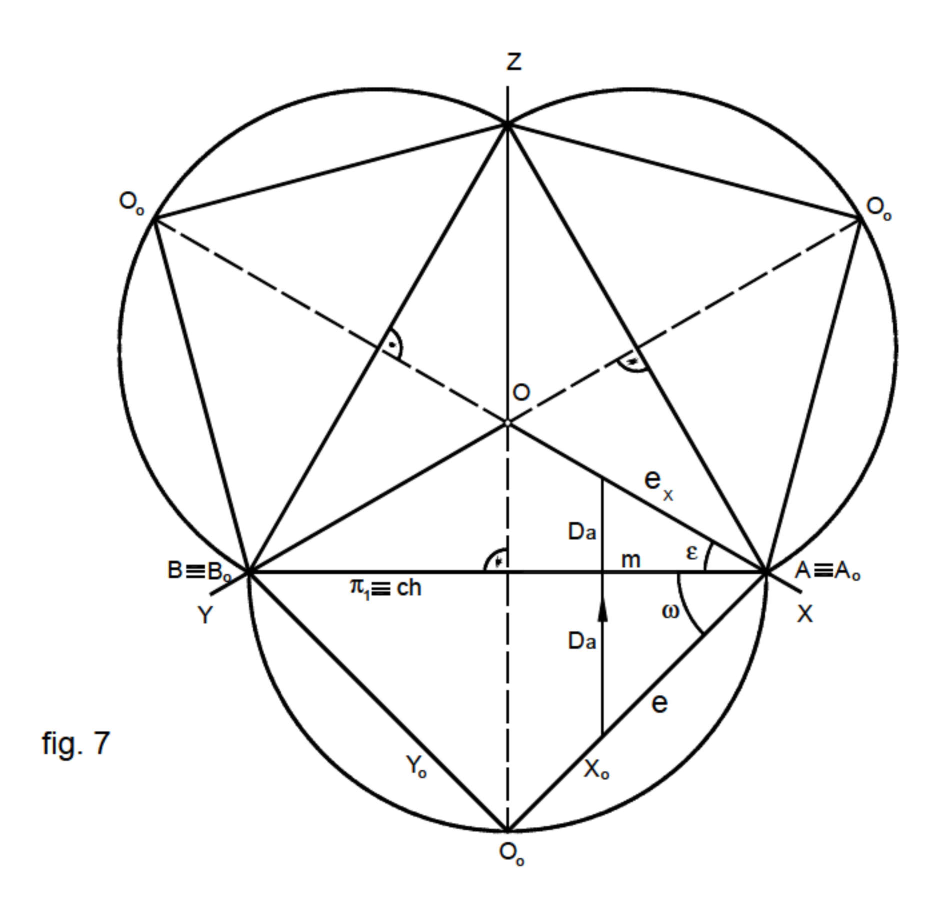


fig. 7

Utilizando la traza AB como línea de abatimiento, se obtiene en $A_oB_oO_o$ el abatimiento de la cara ABO, situando sobre X_o una magnitud e, que por proyección se reduce a e_x sobre X. Podemos establecer que:

$$m = e_x \cdot \cos\varepsilon$$
$$m = e \cdot \cos\omega$$

$e_x \cdot \cos\varepsilon = e \cdot \cos\omega$

$e_x = e \cdot (\cos\omega / \cos\varepsilon)$, por lo que $\cos\omega / \cos\varepsilon = \mu_x$ (coeficiente de reducción del eje X).

Aplicando estas consideraciones a un sistema isométrico, por ejemplo; tenemos que ω=45° y ε=30°, por lo que cos45 / cos30 = $\sqrt{2}/2 : \sqrt{3}/2 = 0.816$

Los coeficientes que afectan a los ejes Y y Z los encontraremos de forma similar abatiendo respectivamente las caras BOC y AOC.

Realizada la obtención numérica, pasaremos a explicar la forma gráfica, cuyo sencillo trazado vemos en la (fig.8). Su utilidad es grande porque nos permite realizar escalas volantes de posterior aplicación práctica. El coeficiente será el cociente gráfico e_x/e.

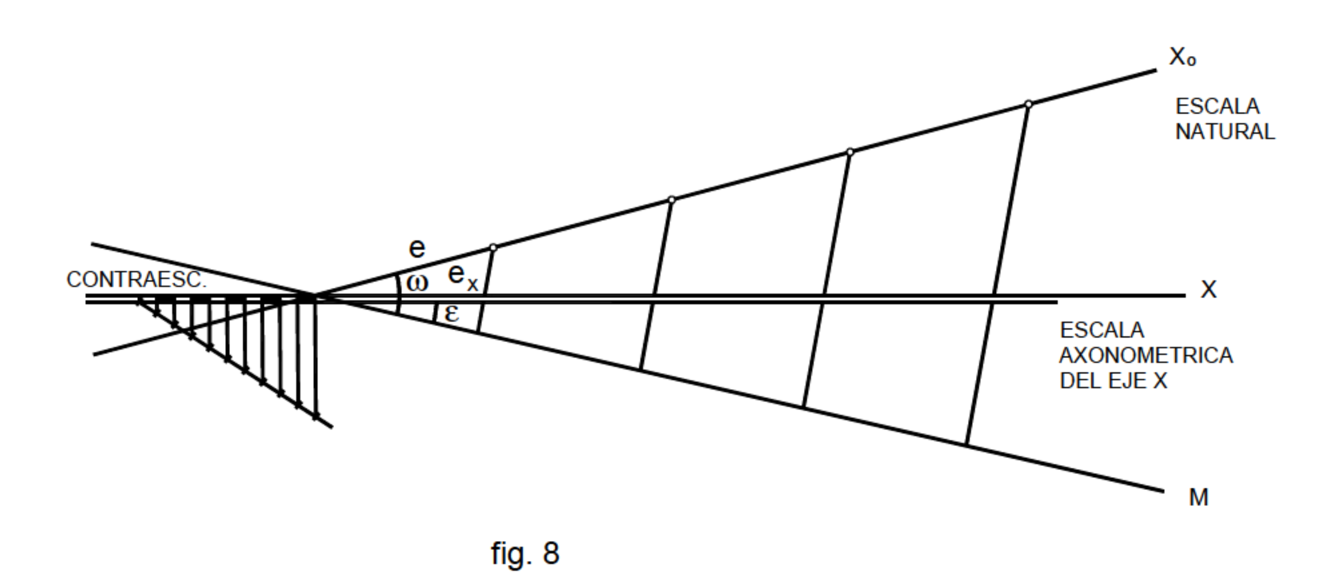


fig. 8

6. ESCALAS AXONOMÉTRICAS. Teorema de SCHLÖMILCH - WAISBACH

Aunque es preciso diferenciar las Escalas de los Coeficientes de reducción, ambos conceptos están íntimamente relacionados, ya que conocidos los Coeficientes podremos obtener las Escalas y viceversa.

Entendemos por Escala axonométrica como la proyección de la unidad de la escala natural -e- referida a los ejes del sistema axonométrico correspondiente, pudiendo establecer que:

$e_x = e\cdot\cos\alpha$, $e_y = e\cdot\cos\beta$, $e_z = e\cdot\cos\gamma$, relaciones que nos determinan la ecuación:

$e_x/\cos\alpha = e_y/\cos\beta = e_z/\cos\gamma = e$. Las escalas axonométricas son directamente proporcionales a los cosenos de los ángulos que forman los ejes con el plano del cuadro π.

La segunda parte del teorema de SCHLÖMILCH - WAISBACH dice que "Los cuadrados de las escalas axonométricas e_x, e_y, e_z y natural e, son respectivamente proporcionales a los lados y al semiperímetro del triángulo que se forma al unir los pies de las alturas del triángulo fundamental determinado por el cuadro sobre el triedro" (fig.9). Podemos expresar que:

$e_x^2/a = e_y^2/b = e_z^2/c = e^2/p$ de donde podremos deducir que:

$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2e^2$ y de esta establecer que:

$e = \sqrt{((e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2)}$ esta expresión la podemos obtener graficamente, operación que realizamos en la (fig.10).

También se obtienen los ángulos reductores α, β, y γ.

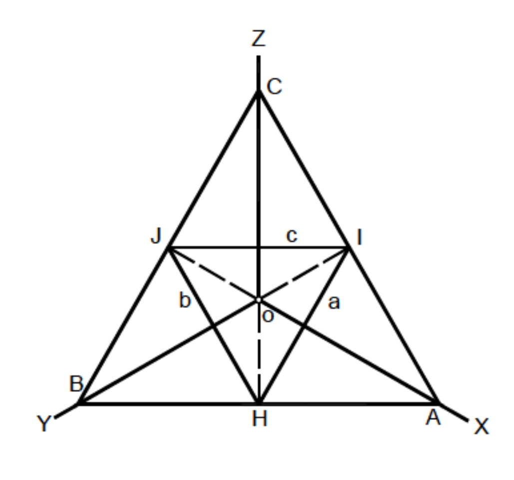


fig. 9

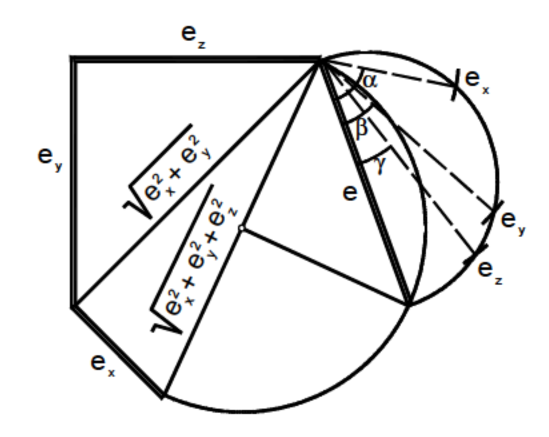


fig. 10

7. RELACIONES ENTRE EL TRIÁNGULO DE TRAZAS. LOS COEFICIENTES DE REDUCCIÓN Y LAS ESCALAS AXONOMÉTRICAS

1) A partir del triángulo de trazas determinar los coeficientes de reducción. Resuelto en la (fig.7).

2) Dados los ángulos α, β y γ determinar los ejes axonométricos (fig.11).

3) Dadas las escalas axonométricas, determinar, los ángulos α, β y γ y los ejes axonométricos. En la (fig.10) se resuelve la primera parte del problema, quedando reducido después al caso anterior.

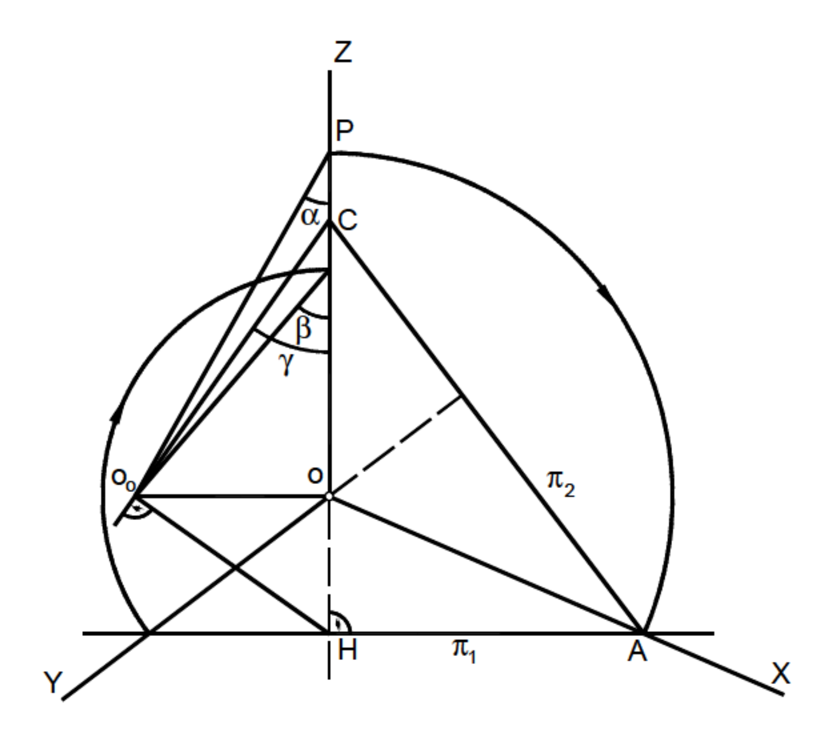


fig. 11

Dibujamos una recta vertical que fijamos como posición del eje Z, y en ella colocamos dos puntos cualesquiera C y O. El punto O será la proyección del vértice del triedro. A partir de C construimos el ángulo γ, la perpendicular OO_0 es la altura a la que se encuentra π del origen. La perpendicular al lado del ángulo γ por O_0 nos da sobre Z el punto H, por el que pasa π_1 perpendicular a Z.

Por O_0 hacemos pasar una recta que forme con Z el ángulo α, obteniendo así el punto P sobre Z. Con centro en O y radio OP trazaremos un arco que cortará a π_1 en A, la recta OA es la proyección de X y AC será la traza π_2, a la que trazaremos la perpendicular desde O, para así obtener la proyección del eje Y, quedando por tanto determinado el sistema de ejes axonométricos, a partir de los ángulos reductores α, β, y γ.

8. DIBUJO ISOMÉTRICO. APLICACIONES

Al estudiar las clases de sistemas axonométricos, veíamos como al producirse igualdad entre los ángulos α, β y γ de los ejes con el cuadro, también existía entre las proyecciones de los ejes igualdad entre los ángulos ε, ω, δ que forman entre sí, y todos ellos por tanto iguales a 120 grados.

Podremos obtener el valor de α, β y γ de la forma. siguiente:

Los ejes forman con una recta perpendicular al cuadro que pasa por el origen, los ángulos directores α_1, β_1, γ_1, complementarios de los anteriores, pudiendo establecerse que:

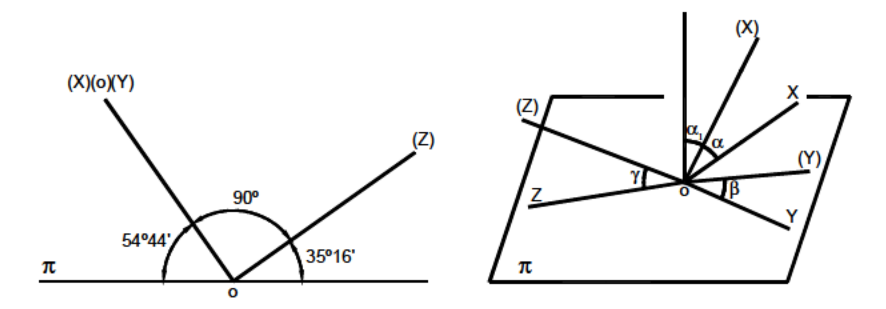


fig. 12

$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$ y

$\text{sen}^2 \alpha_1 + \text{sen}^2 \beta_1 + \text{sen}^2 \gamma_1 = 2$

como $\alpha = (90° - \alpha_1)$, tenemos que:

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$ y al ser $\alpha=\beta=\gamma$

$3\cos^2 \alpha = 2 \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{2/3} = 0.816 \rightarrow 35°16'$

Las caras del triedro formarán por tanto con el cuadro, ángulos de 54°44'. (fig. 12)

En la (fig.13) se indican las diferentes posiciones que pueden ocupar los ejes con objeto de que puedan apreciarse los detalles de cada una de las diversas caras de la pieza.

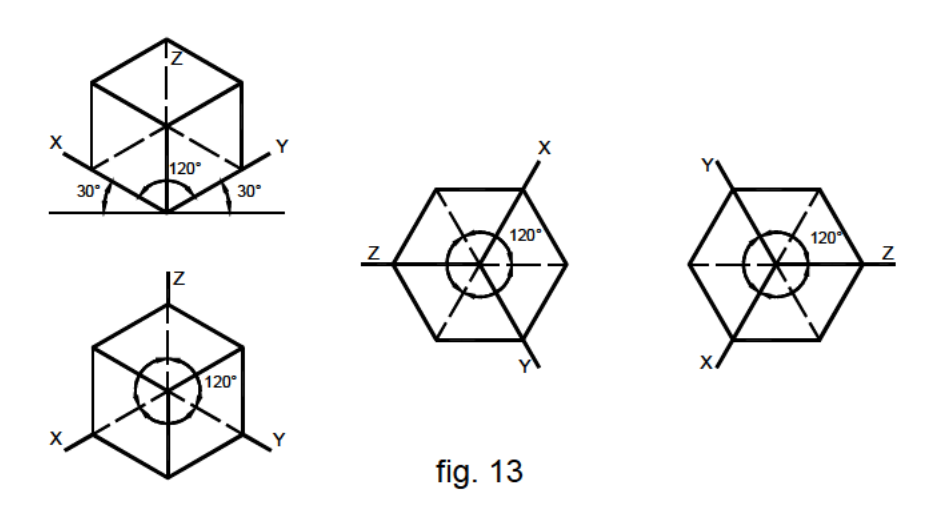


fig. 13

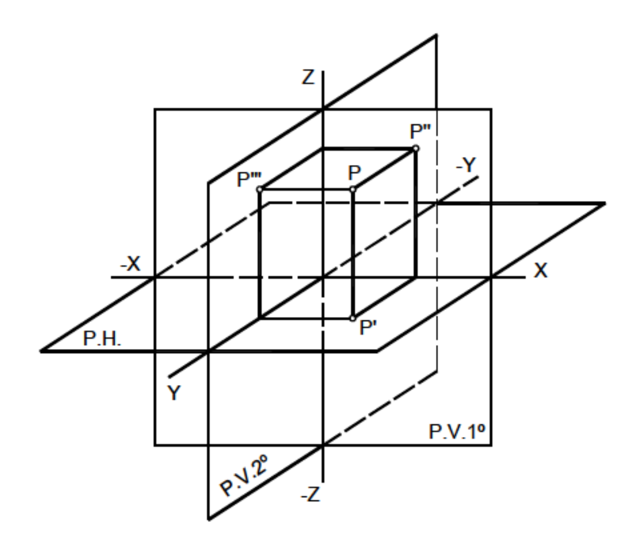
Una de las aplicaciones más directas de la perspectiva isométrica es para el trazado de croquis y de esquemas, en la representación de detalles mecánicos o estructurales, en ilustraciones técnicas, dibujos para patentes, esquemas de distribución, tuberías, etc... Muy prácticos son también los despieces de un conjunto, pues permiten ver las piezas por separado en posición relativa de montaje. Cuando la pieza presenta detalles interiores, se secciona por planos paralelos a los del triedro, produciendo las denominadas, secciones isométricas, rayándolas a 45 grados con respecto al eje de la figura. Las representaciones isométricas sustituyen a las diédricas en algunos países, EEUU por ejemplo, dan una mejor sensación del objeto, y la toma de medidas puede realizarse directamente, si no se han empleado reducciones; en caso contrario se emplearán las escalas correspondientes.

9. REPRESENTACIONES Y ALFABETOS. EL PUNTO

Los planos dividen al espacio en ocho regiones, por lo que el punto puede estar en cualquiera de ellas. Existirán por tanto coordenadas positivas, negativas y nulas, según el caso.

Las 27 posiciones características del punto en este sistema, quedan distribuidas de la forma siguiente.

a) En los espacios 8
b) En los planos coordenados ... 12
c) En los ejes coordenados 6
d) En el origen de ejes 1



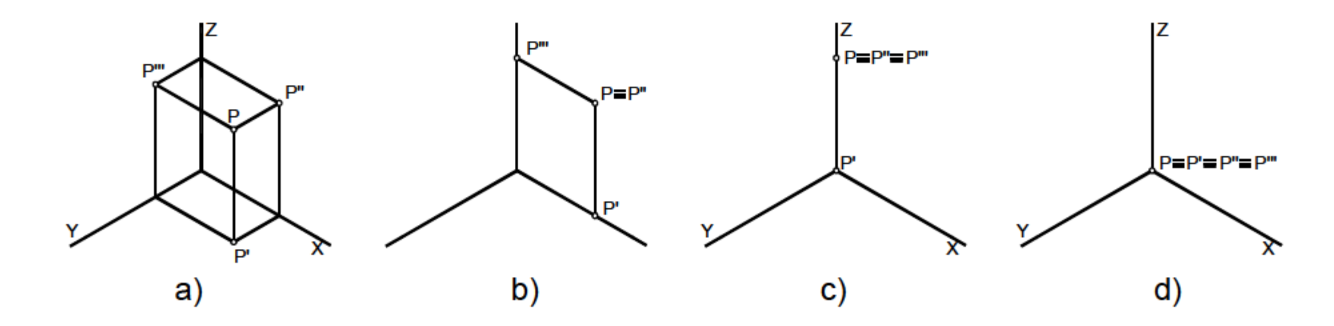


fig. 14

10. LA RECTA

Una recta en el espacio queda definida conociendo dos de sus puntos, las proyecciones de la recta pasarán por las homónimas de los puntos.

Supongamos una recta r, oblicua respecto a los planos de proyección, la recta queda definida, por dos cualesquiera de sus cuatro proyecciones, por ejemplo r y r'.

El punto $R_1 \equiv R_1'$ es la traza de la recta con el plano XOY por ser donde dichas proyecciones se cortan. Refiriendo R_3', punto de corte de r' y el eje Y, a $R_3 \equiv R_3'''$ sobre la proyección r se obtiene la traza R_3 de la recta con el plano ZOY. De igual forma prolongando r' hasta que corte en R_2' al eje X y refiriendo R_2' a $R_2 \equiv R_2''$, sobre la proyección r se obtiene la traza segunda con el plano XOZ.

Como se ve, en los puntos trazas R_1, R_2 y R_3 se cortan la proyección directa de la recta y las proyecciones primera, segunda y tercera respectivamente.

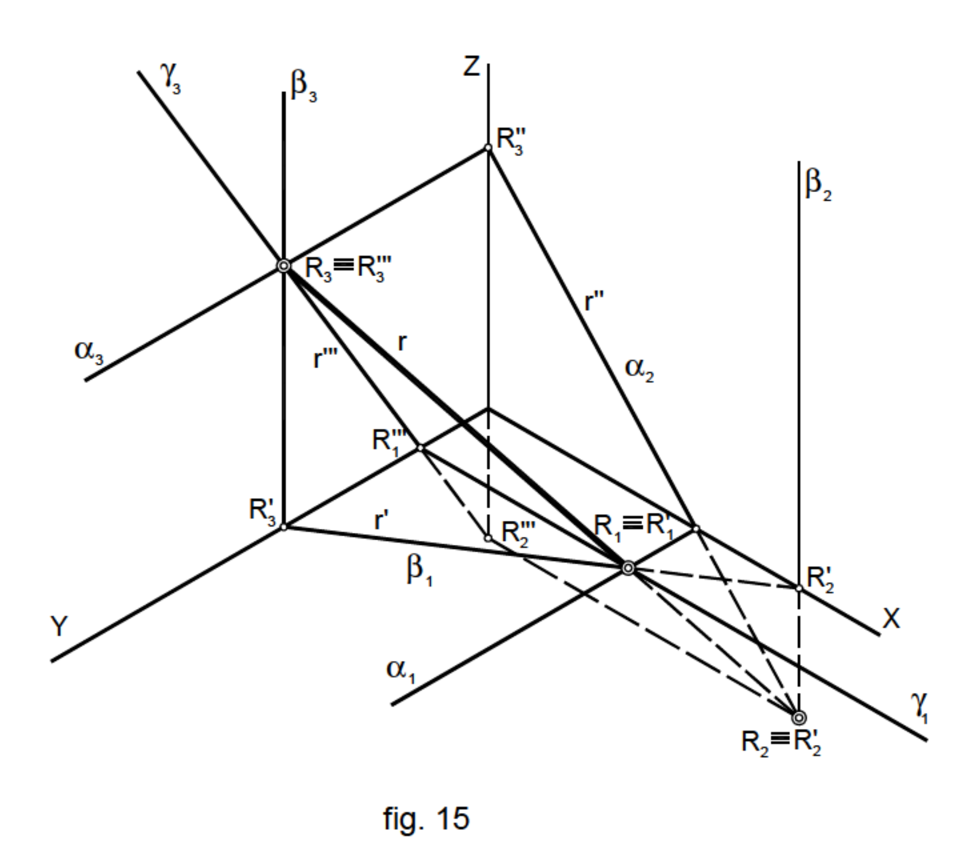


fig. 15

Planos proyectantes de la recta son aquellos que la proyectan sobre cada uno de los planos de proyección. El plano proyectante de la recta sobre el cuadro tiene por traza la proyección directa de la recta. Sobre el XOY el plano β, sobre el XOZ el plano α y sobre el YOZ el plano γ. Se observa en la figura como las proyecciones r', r'' y r''' se confunden respectivamente con β_1, α_2 y γ_3.

En las figuras siguientes aparecen casos particulares de la posición de la recta en el espacio.
a) paralelas a los planos de proyección.
b) paralelas a los ejes.
c) que cortan a los ejes.
d) situadas en las caras del triedro.
e) recta que pasa por el origen.
f) recta proyectante.
g) recta situada en el plano proyectante de un eje del sistema. (fig. 16)

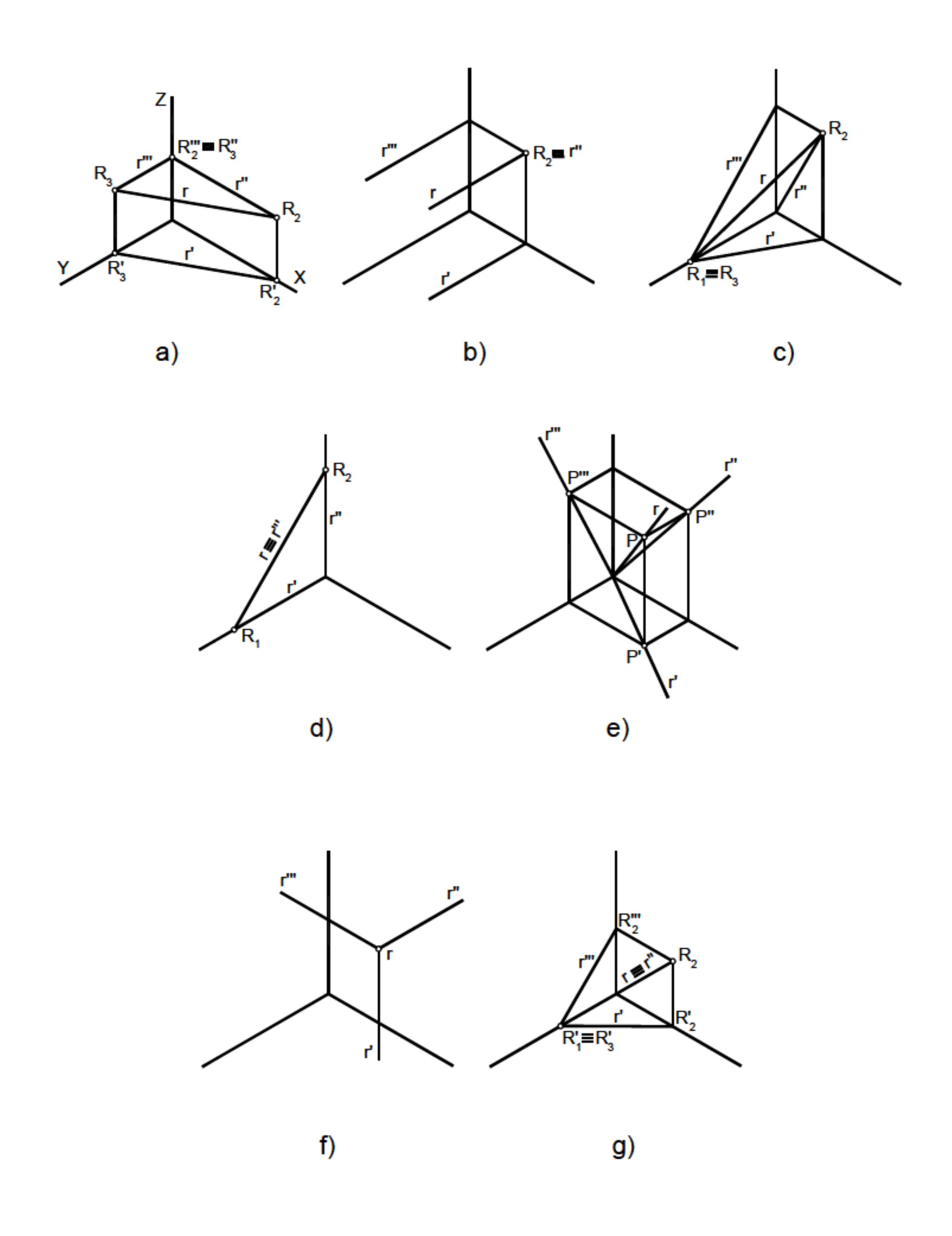


fig. 16

11. EL PLANO. DETERMINACIÓN POR ELEMENTOS SUFICIENTES

Como en todos los sistemas de representación, en el Sistema Axonométrico, un plano viene definido por sus trazas o rectas de intersección con los planos coordenados. Dichas trazas se cortan dos a dos en puntos de los ejes, puntos que determinan el triángulo de trazas ABC (fig.17).

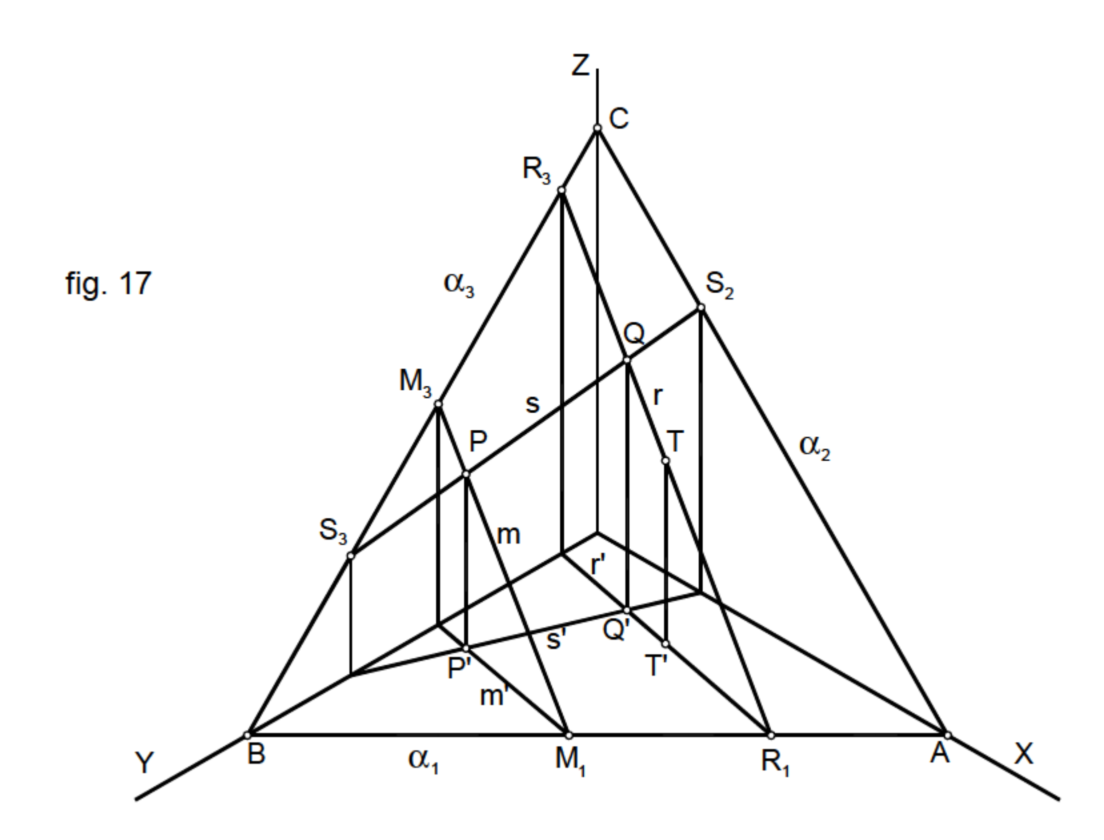
Para la determinación de planos partiremos de los casos siguientes:

a) Por tres puntos no alineados P, Q y T.

b) recta r y punto P que no se pertenecen.

c) rectas r y s que se cortan.

d) rectas r y m paralelas.



Los cuatro casos están incluidos en la figura, en la que podemos apreciar la obtención de las trazas de las rectas por las que pasarán las trazas del plano, condición de pertenencia que dice que para que una recta esté situada en un plano, las trazas de la recta estarán contenidas en las homónimas del plano.

Para situar un punto en un plano, lo colocaremos sobre una de las rectas del plano; los problemas inversos se resuelven con idéntico fundamento.

En la (fig. 18) aparecen casos particulares de la posición que un plano puede tomar respecto de los elementos de referencia del sistema.

a) Plano oblicuo.
b) paralelo a un plano coordenado.
c) plano que pasa por un eje.
d) plano paralelo a un eje.
e) plano que pasa por el vértice del triedro.
f) plano proyectante sobre el cuadro.

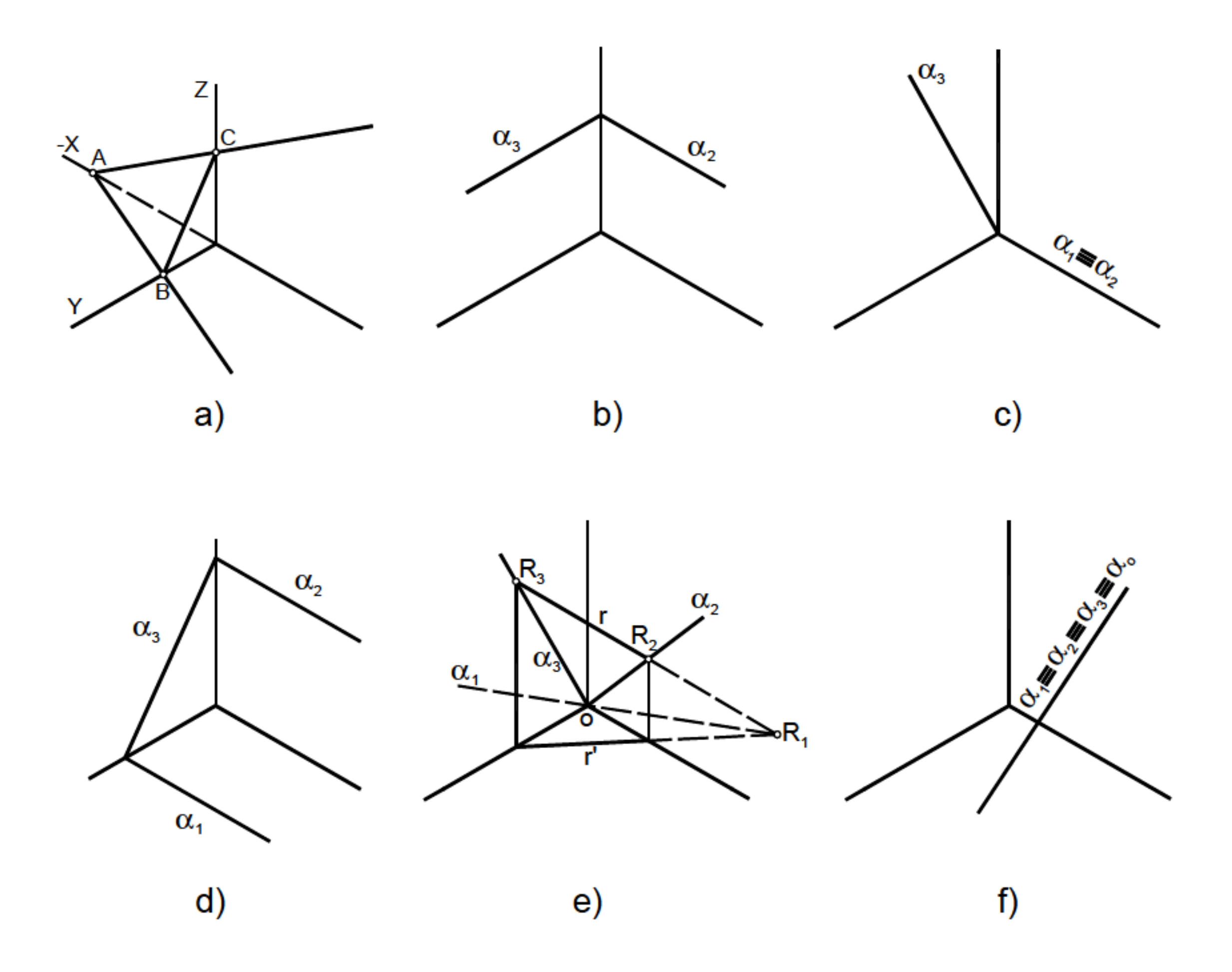


fig. 18

Un plano cualquiera, a excepción de los paralelos al cuadro, tiene además de las trazas α_1, α_2 y α_3 una cuarta traza α_o, denominada ordinaria o natural, obtenida en su intersección con el cuadro. En la (fig.19) aparece representado el plano α con todas sus trazas, la α_o se obtiene uniendo los puntos 1, 2 y 3 de intersección de las trazas α_1, α_2 y α_3 con las del cuadro π_1, π_2 y π_3 respectivamente. Se utiliza en problemas de perpendicularidad, distancias y abatimientos.

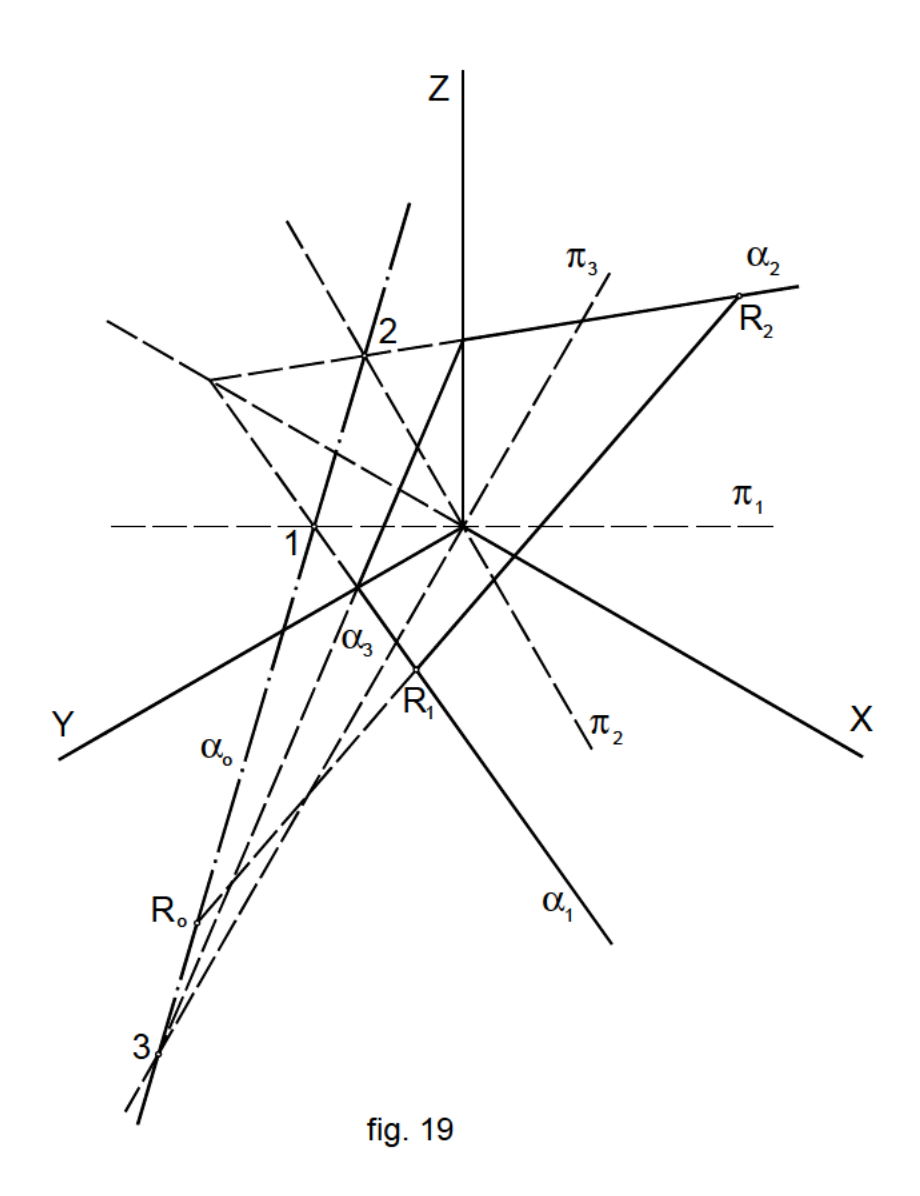


fig. 19

12. PASO DEL AXONOMÉTRICO AL DIÉDRICO Y VICEVERSA

Tenemos un punto P del sistema Axonométrico. Para pasarlo al diédrico, convertimos el plano XOY en P.H. y el plano XOZ en P.V., con esto el eje X hace de línea de tierra. Se traza por el punto N la perpendicular a la línea de tierra y se toman sobre ella las magnitudes $NP_D''=NP'' /\mu_z$ y $NP_D'=NP' /\mu_y$.

Operación que realizamos teniendo en cuenta las reducciones que afectan a toda representación axonométrica, de esta forma aparecerán en diédrico la cota y el alejamiento en su verdadera magnitud (fig.20).

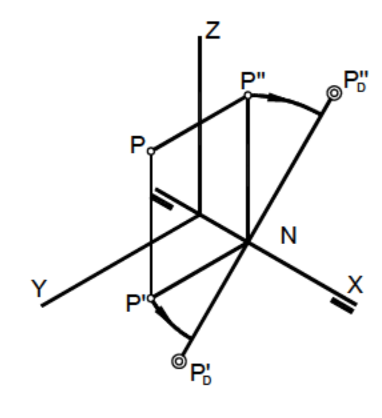


fig. 20

Basándonos en las consideraciones dadas para el punto, en la (fig.21) se realiza el paso de la recta r en proyección axonométrica a las proyecciones diédricas r'' y r'.

Considerando a la recta definida por dos puntos, R_1 y R_2 se realiza la siguiente reconversión:

$$R_1 \ldots\ldots \begin{cases} R_1' \ldots\ldots\ldots H' \\ \\ R_1'' \ldots\ldots\ldots H'' \end{cases} \qquad R_2 \ldots\ldots \begin{cases} R_2'' \ldots\ldots\ldots V'' \\ \\ R_2' \ldots\ldots\ldots V' \end{cases} \qquad \begin{aligned} V''V' &= R_2''R_2'/\mu_z \\ H''H' &= R_1''R_1'/\mu_y \\ H''V' &= R_1''R_2'/\mu_x \end{aligned}$$

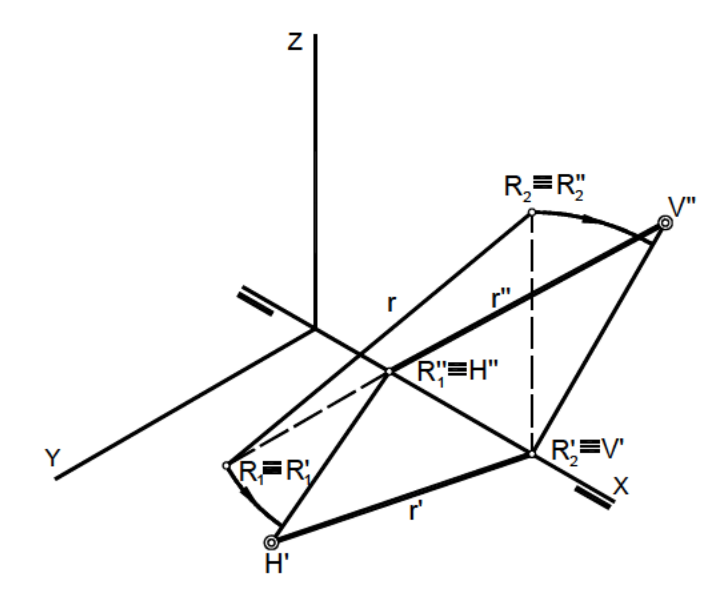


fig. 21

En la (fig.22) se realiza el paso de un plano y de una figura, dados por sus proyecciones diédricas, al sistema axonométrico.

Los segmentos OA, OB y OC se reducen convenientemente y se llevan sobre los ejes X, Y y Z de esta forma queda definido el plano por sus trazas α_1, α_2 y α_3. Un punto de la figura tiene tres coordenadas (x, y, z) que se colocan reducidas sobre los ejes correspondientes, construyéndose a continuación el paralelepípedo de proyecciones, en el vértice opuesto al O se tendrá la perspectiva o proyección directa del punto 3. Con idéntico procedimiento obtendremos la de los restantes puntos 1 y 2 de la figura.

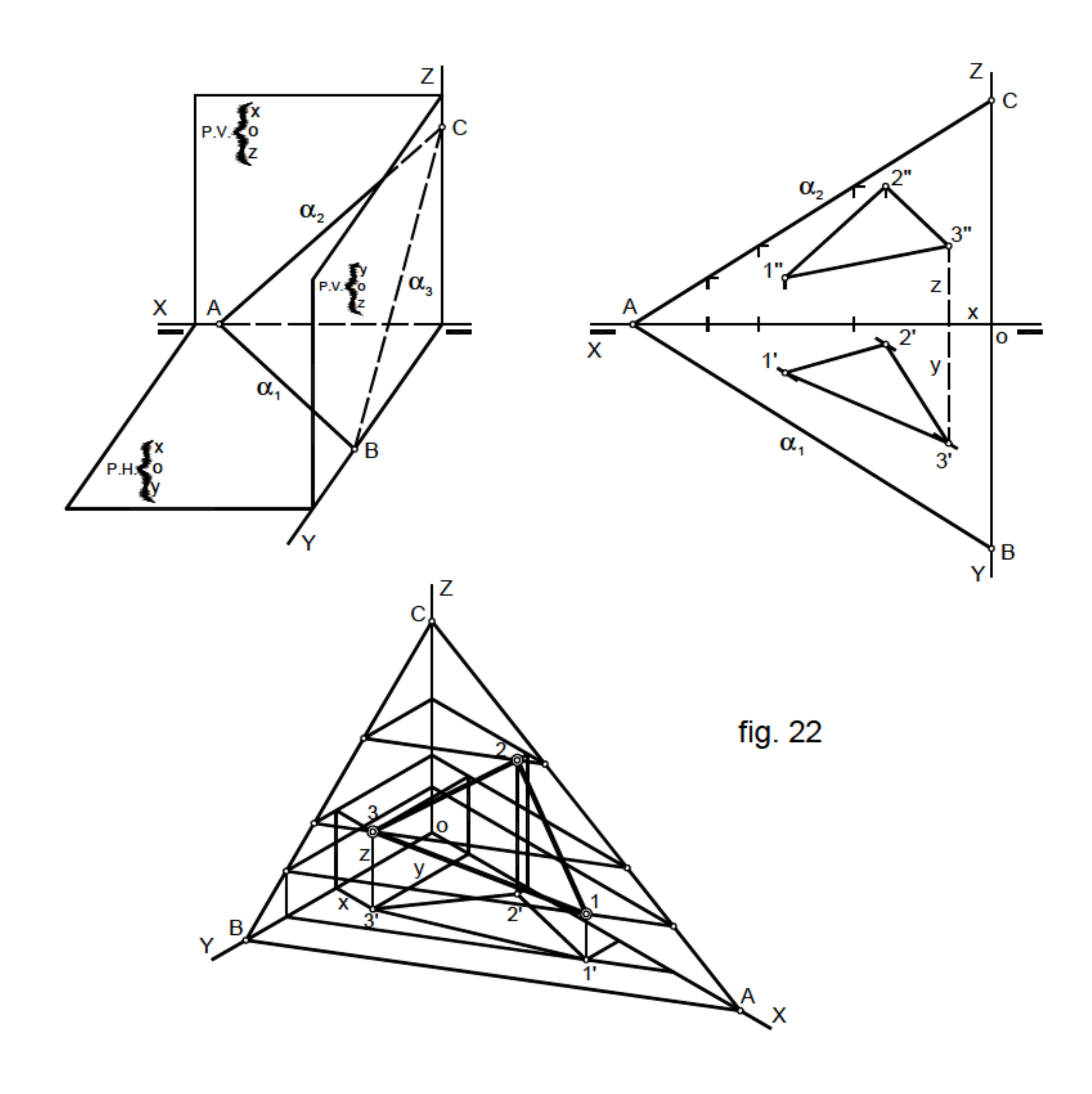


fig. 22

13. INTERSECCIÓN DE PLANOS

En el estudio realizado del Sistema Diédrico se indicó el procedimiento a seguir en el espacio para resolver este problema. La recta i, intersección de los dos planos α y β se obtiene al unir los puntos I_1, I_2 e I_3, en que se cortan dos a dos las trazas homónimas de los planos.

Después de obtenida la proyección directa -i-, se refieren los puntos I_1, I_2 é I_3 a los ejes y se hallan las demás proyecciones tal y como se indica en la (fig.23).

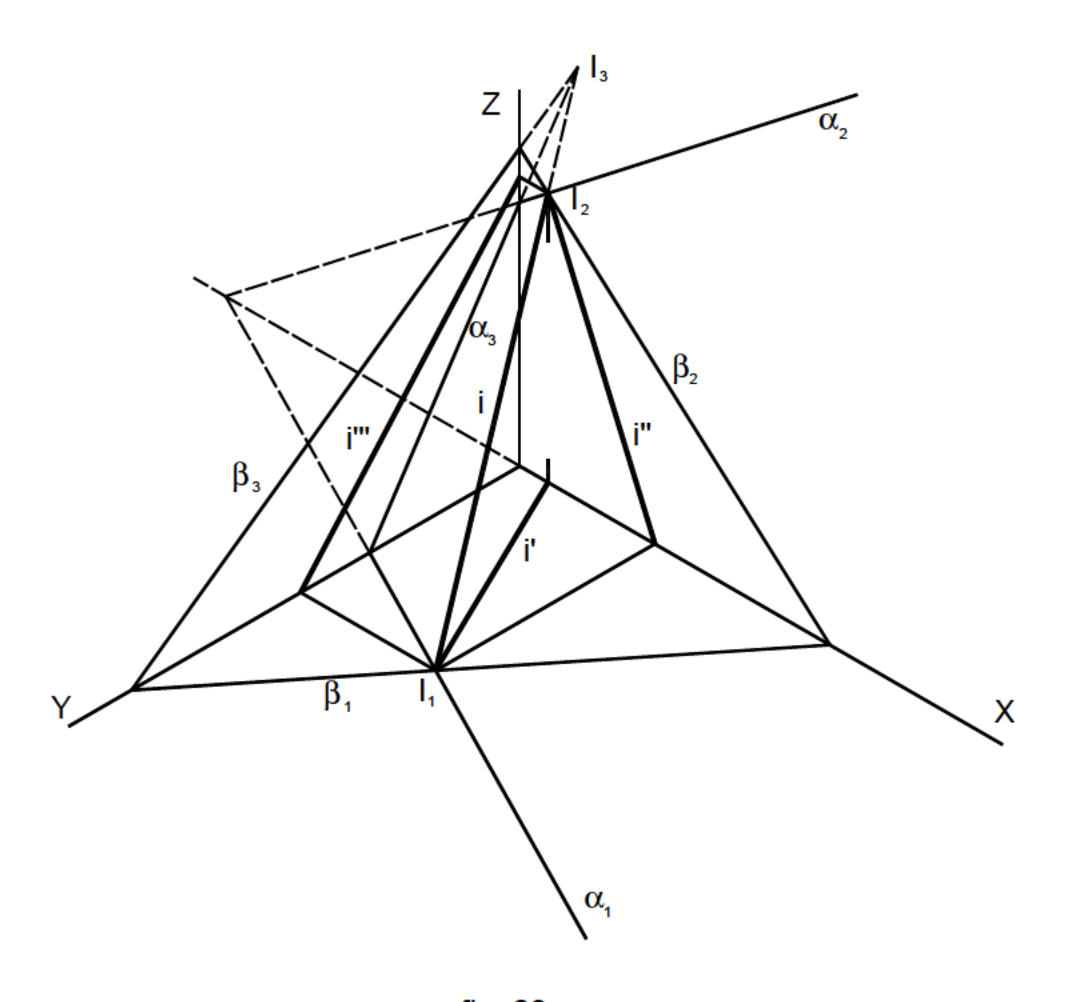


fig. 23

En las figuras sucesivas, aparecen diferentes casos de intersección de planos, en los que se siguen para su resolución criterios anteriormente expuestos.

a) entre dos planos paralelos a un eje.

b) entre oblicuo y otro que contiene a un eje.

c) entre uno paralelo y un plano coordenado y otro oblicuo.

d) entre planos cuyas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo.

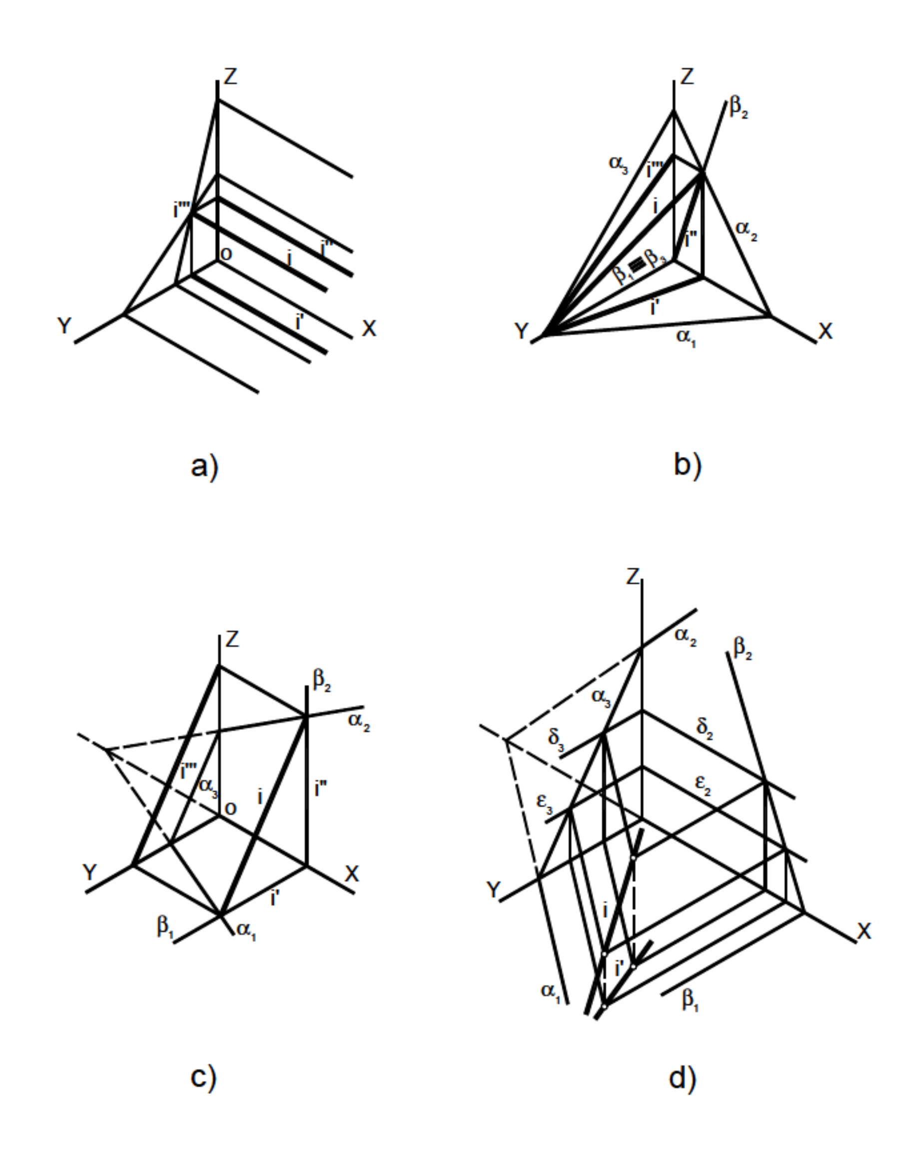
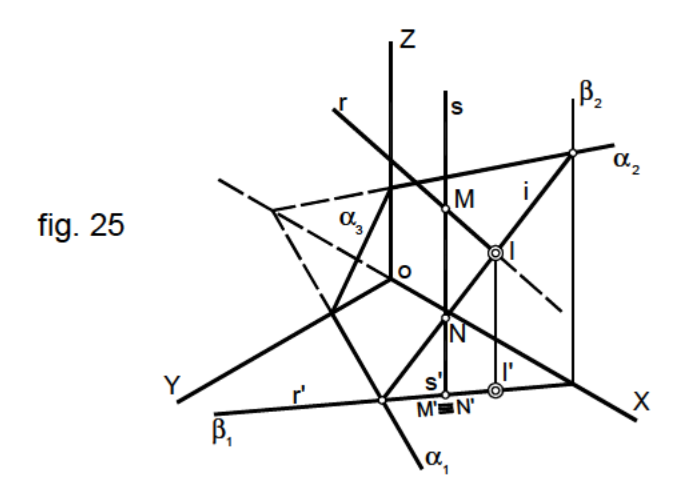


fig. 24

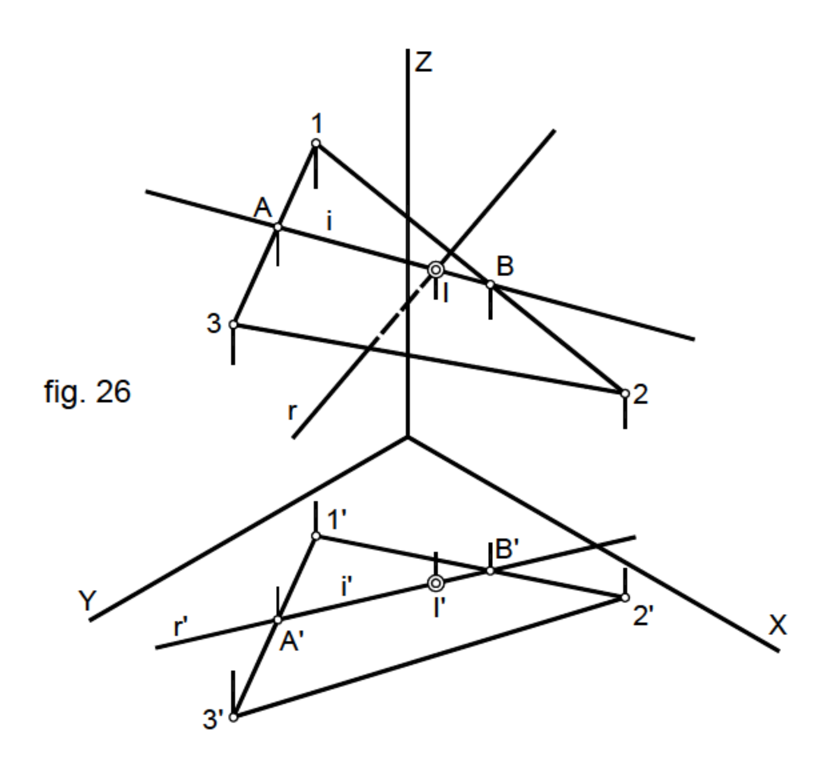
14. INTERSECCIÓN DE RECTA Y PLANO. CAMPO DE VISIBILIDAD

(Fig. 25). Sea el plano α (α_1, α_2, α_3) y la recta r(r'). Hacemos pasar por la recta un plano cualquiera, el proyectante β(β_1, β_2, β_3) y determinamos la intersección i(i') de este plano con el dado. La recta i encuentra a la recta r en el punto I(I') buscado. Para determinar la parte visible de la recta, tomamos un punto M(M') de ella y trazando por él la recta vertical s(s'), vemos que encuentra al plano en el punto N(N'). Este punto, por tener menos cota que el M(M'), nos indica que la recta es vista a partir del punto I hacia arriba, quedando oculta por el plano a partir del punto de intersección hacia abajo.



*.- Intersección de una recta con una superficie plana.

Se sigue el método general aplicado en el Sistema Diédrico.
En el trazado de la (fig.26) se aprecian claramente los pasos seguidos.



15. PARALELISMO

Las condiciones de paralelismo expuestas en el estudio del sistema diédrico son válidas, para todos los demás Sistemas, por lo que aquí sólo resolveremos gráficamente los casos, sin entrar en explicaciones repetitivas de los mismos.

Por un punto P, trazar la recta r paralela a otra recta s dada (fig.27).

Por un punto P, trazar el plano β paralelo a otro dado α (fig.28).

Por un punto P, trazar una recta s paralela a un plano dado (fig.29).

Por una recta r, hacer pasar un plano paralelo a una recta t dada (fig.30).

Por un punto P, hacer pasar un plano paralelo a dos rectas r y s dadas (fig.31).

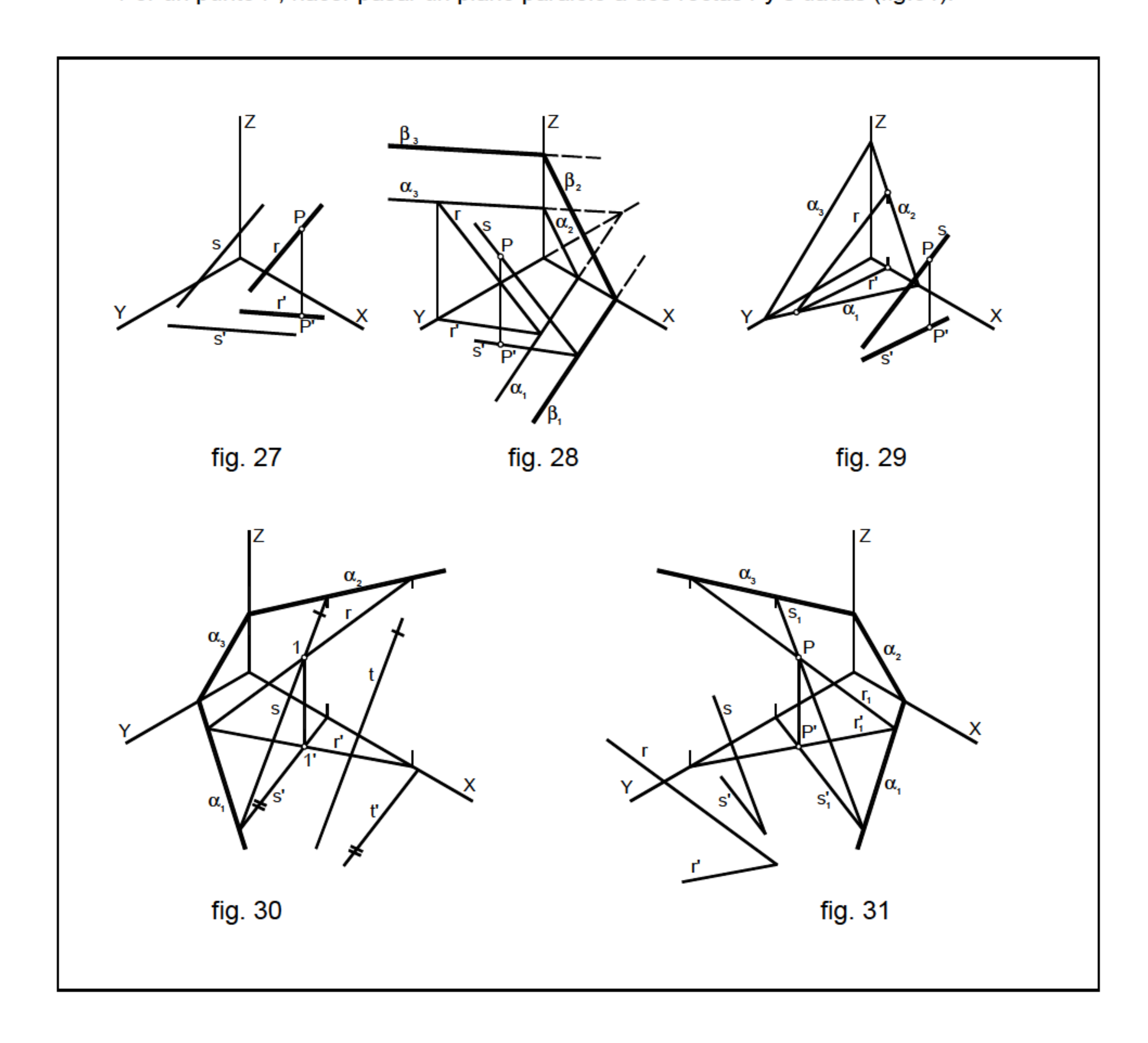


fig. 27 fig. 28 fig. 29

fig. 30 fig. 31

16. PERPENDICULARIDAD

Estudiaremos aquí solamente los procedimientos generales que nos resolverán los diferentes casos de perpendicularidad que se nos puedan presentar.

*.- Recta perpendicular a un plano.

Se trata de trazar por el punto P(P') la recta perpendicular al plano $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Recordando el teorema de las tres perpendiculares, se halla la traza ordinaria o natural α_o y la proyección directa r de la recta que se busca, pasará por la proyección P del punto y será perpendicular a α_o (fig.32).

La proyección r' pasará por P' y será perpendicular a α_1. Perpendicularidad que trazaremos en el abatimiento del plano XOY, es decir, r'_o perpendicular por P'_o a $(\alpha_1)_o$, obteniendo el punto M'_o que referimos por desabatimiento a α_1 en M'. Conocido M' pie de perpendicularidad, lo unimos con P' obteniendo la proyección r' de la recta r, quedando así definida.

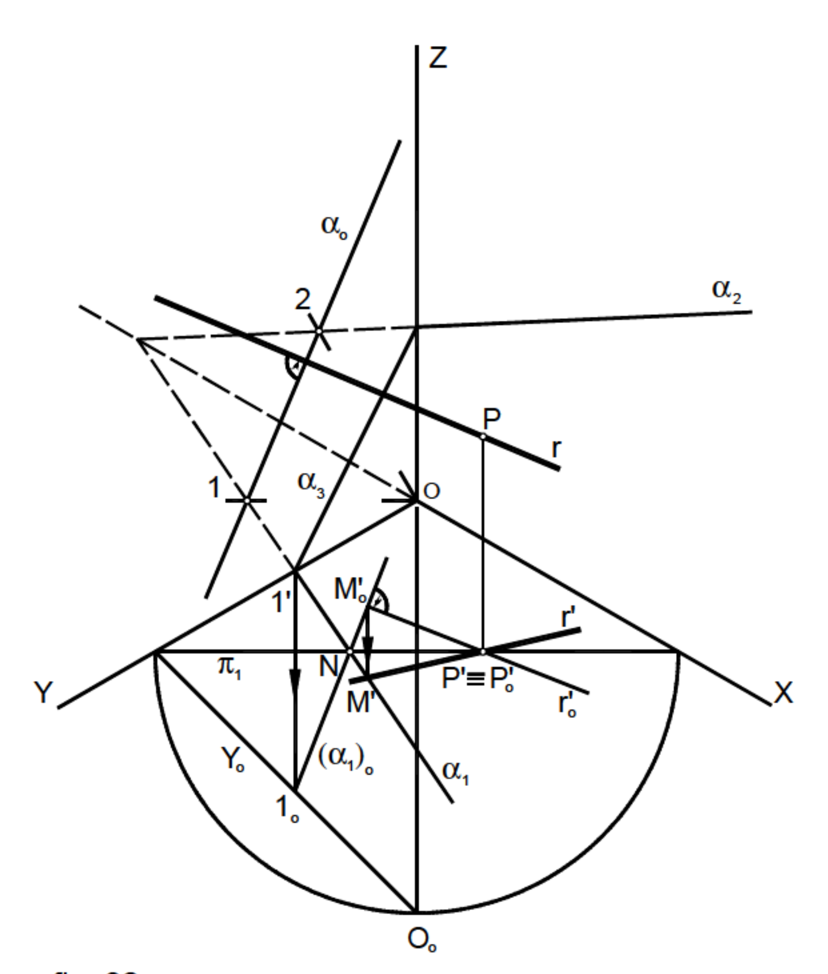


fig. 32

*. - Plano perpendicular a una recta.

Sea la recta r(r') y el punto P(P').

Por el punto P trazamos un plano paralelo al del cuadro, para lo cual nos servimos de la horizontal s, cuyas trazas S_2 y S_3 nos definen las trazas del plano del cuadro π_2 y π_3.

El plano que se busca cortará al plano del cuadro π según una recta que pasa por P y es perpendicular a r; esta recta, haciendo el razonamiento del problema anterior, es la traza ordinaria o natural α_o del plano que se busca.

La traza α_o corta en 1 y 2 a π_1 y π_2 y por estos puntos sabemos que han de pasar las trazas α_1 y α_2 del plano solución. Tomemos la traza α_1; se sabe que es perpendicular en el espacio a r' y como pasa por el punto 1, tenemos ya el camino a seguir para obtenerla.

Se abate r' en r'_o por medio del punto T que abatido es T_o y del punto R que es doble; por 1 trazamos la perpendicular a r'_o que será $(\alpha_1)_o$ y el punto M_o se desabate, obteniéndose M', el cual unido con 1 nos define la traza α_1.

La traza α_1 corta al eje X en un punto que unido con 2 nos define α_2.

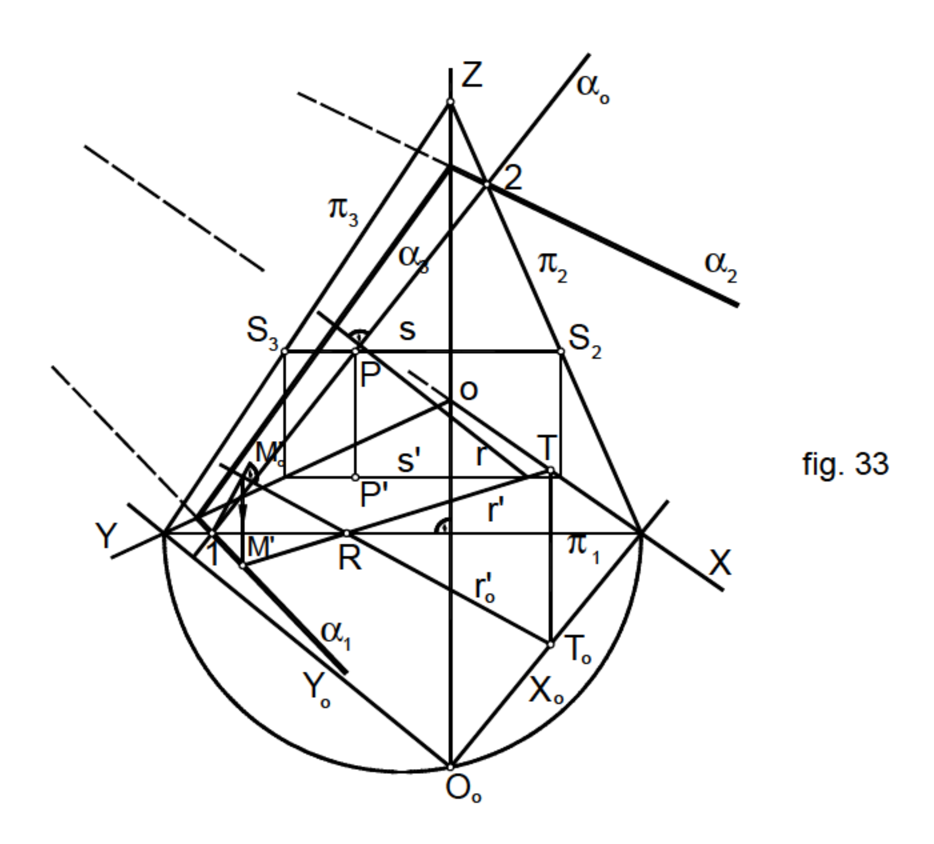


fig. 33

La misma operación se puede repetir con el punto 2 y la proyección vertical primera r" de la recta para obtener α_2 directamente.

*.- Plano perpendicular a otro.

Para que un plano sea perpendicular a otro ha de contener a una recta que sea perpendicular a éste.

Según esto, por el punto dado, se traza la recta perpendicular al plano dado y cualquier plano que pase por ésta cumplirá la condición pedida.

En la (fig.34) partimos del plano $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y del punto P(P'). Por este punto se ha trazado la recta r(r') perpendicular al plano, para lo cual se han realizado las operaciones descritas al estudiar el primer caso de perpendicularidad y que ahora no detallamos. Un plano cualquiera tal como el $\beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ que pase por la recta r(r'), cumple con la condición antes señalada para que sea perpendicular al plano α.

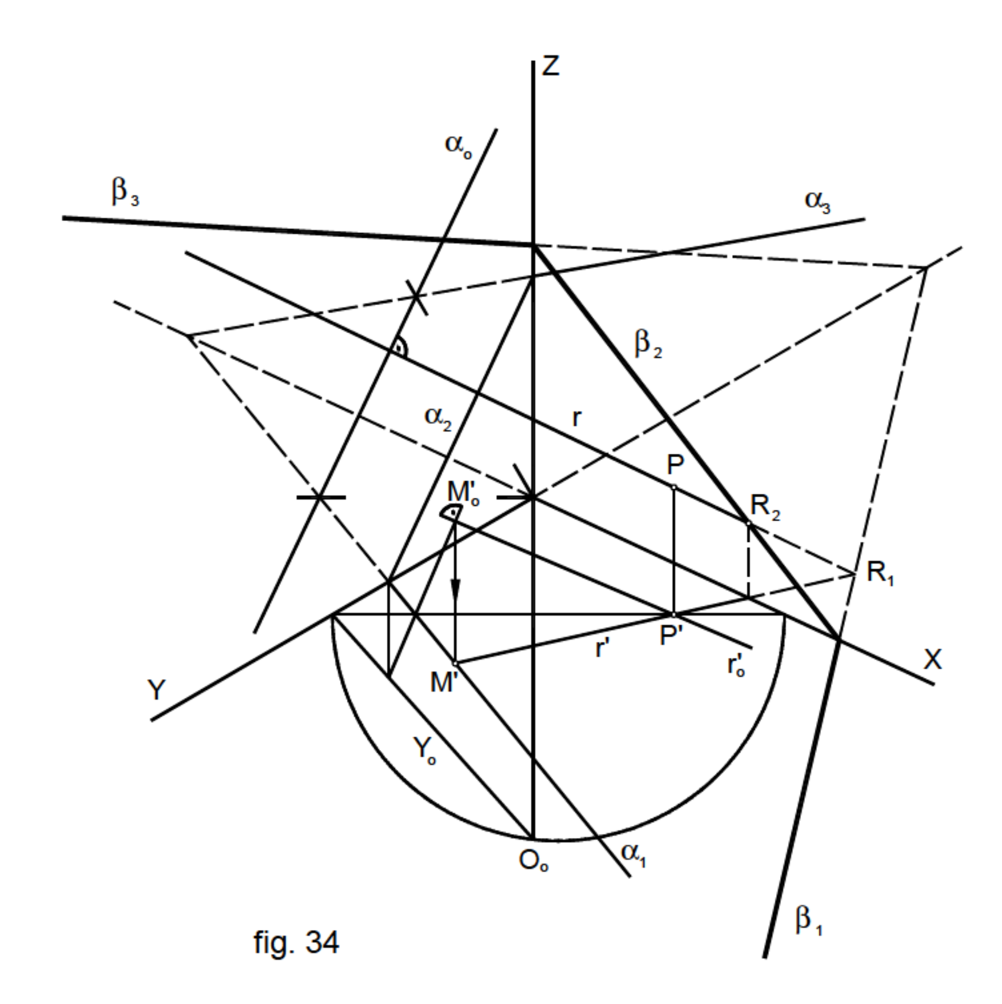


fig. 34

*. - Recta perpendicular a otra.

Este problema se resuelve en el espacio de la forma siguiente: Por el punto P por donde ha de pasar la recta se traza el plano α perpendicular a la recta dada; determinamos el punto de intersección de r y α y este punto se une con el punto P, dándonos la recta perpendicular buscada.

En la (fig.35) tenemos la recta r(r') y el punto P(P'); la recta solución s(s') la obtenemos uniendo el punto P con el S, siguiendo para la obtención del punto S procedimientos empleados en tratados anteriores (fig.33).

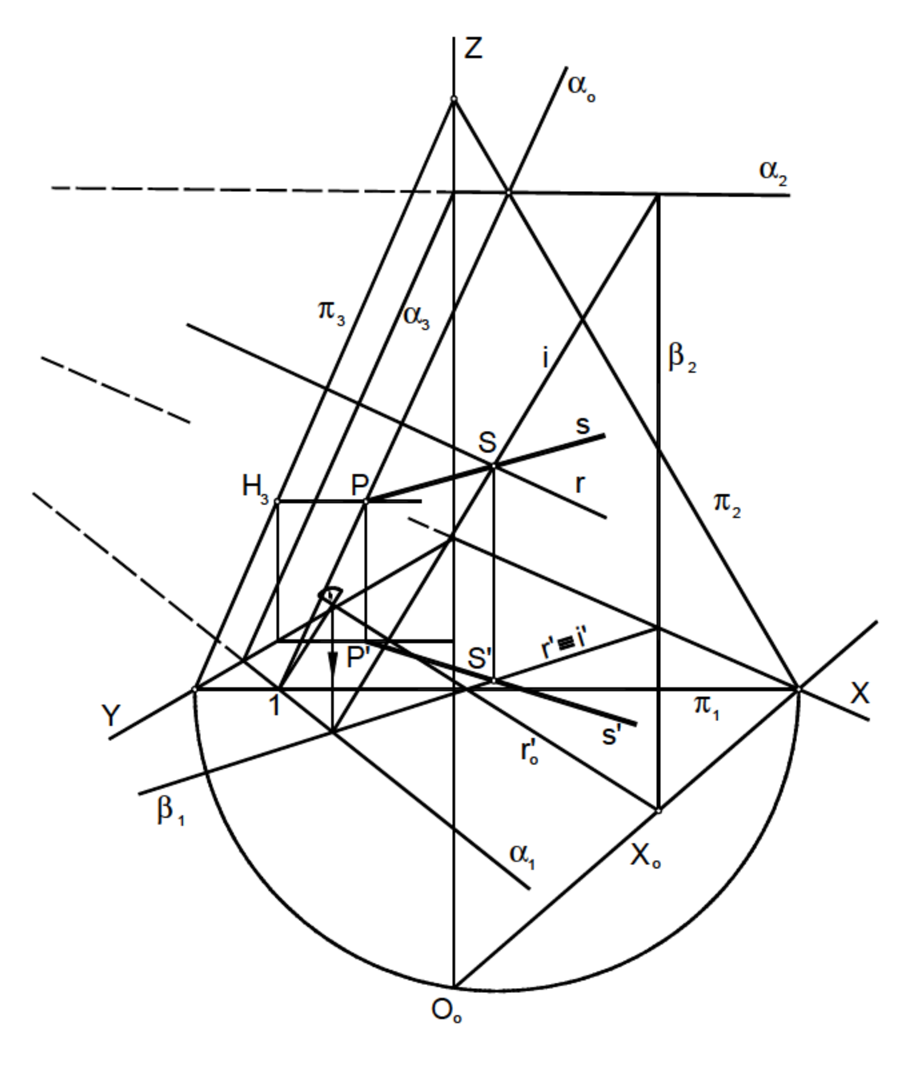


fig. 35

17. DISTANCIAS

*.- Distancia entre dos puntos.

Sean los puntos P(P') y Q(Q'); el segmento que une los puntos es oblicuo a los planos de proyección; para hallar la verdadera magnitud del segmento -d- necesitamos construir la verdadera forma y magnitud del triángulo del espacio PQN rectángulo en N, de catetos PN=d' y QN=h, diferencia de cotas entre los puntos dados. La distancia PQ es la hipotenusa de dicho triángulo.

Abatidas las magnitudes d' en d'_o y h en h_o, se construye el triángulo, cuya hipotenusa D es la distancia buscada.

*.- Distancia de un punto a un plano.
*.- Distancia de un punto a una recta.
*.- Distancia entre dos rectas paralelas.
*.- Distancia entre dos planos paralelos.
*.- Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.

Para su resolución se recurrirá a los planteamientos estudiados en Diédrico, válidos para todo el sistema, quedando todos los casos reducidos a distancia entre dos puntos, estudiado en primer lugar.

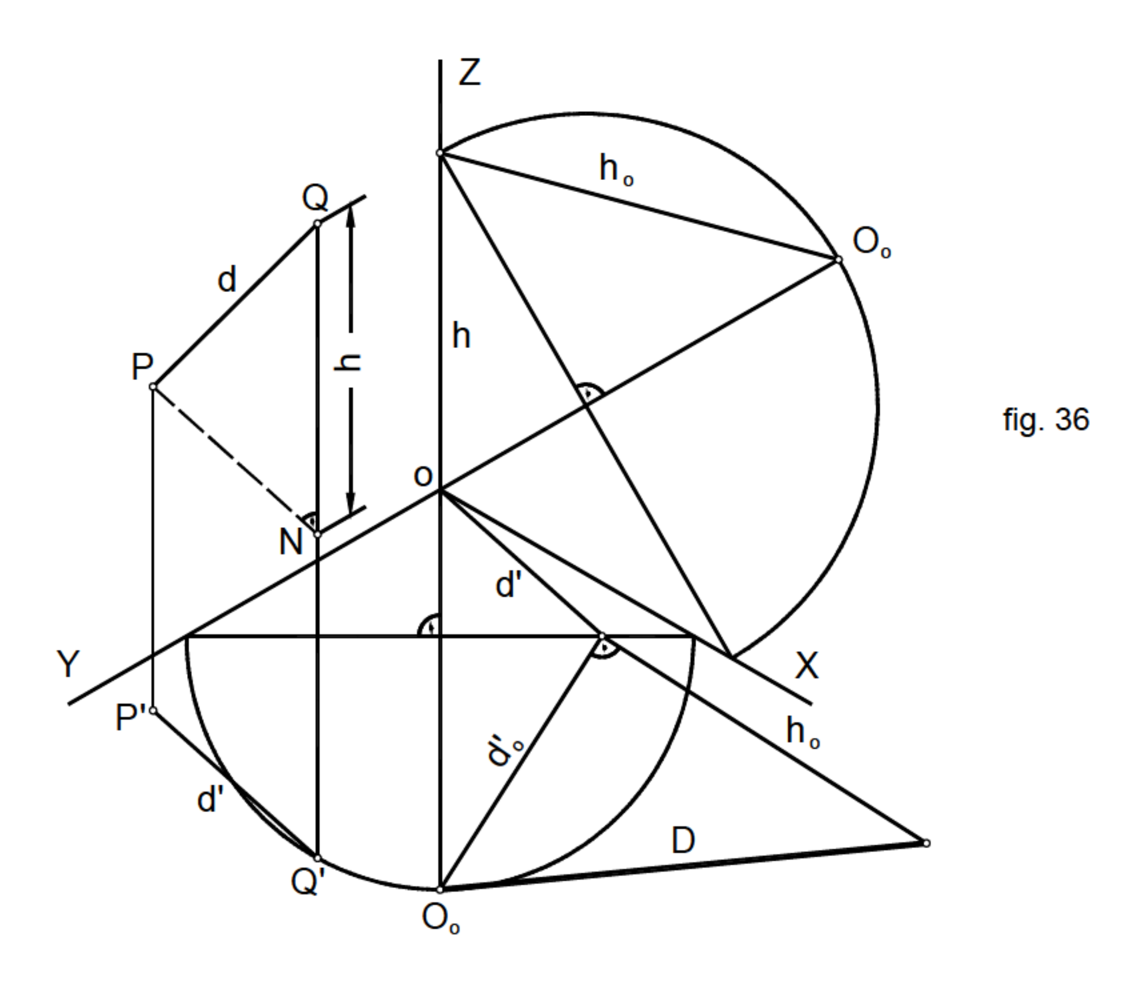


fig. 36

18. ABATIMIENTOS

*.- De un punto situado en un plano (figuras 37 y 38).

Supongamos un punto P(P') situado en un plano $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Se trata de abatir el punto P con el plano α sobre el cuadro. La charnela -ch- del abatimiento es la traza ordinaria o natural α_o del plano. Por la proyección directa del punto se traza la perpendicular y la paralela a la charnela y sobre la paralela se lleva la distancia -d- del punto (P) al cuadro. Tomado como radio de giro la hipotenusa del triángulo construido, se obtienen los puntos P_o sobre la perpendicular a la charnela, abatimientos del punto sobre el cuadro en uno u otro sentido (fig.37).

Queda por determinar la magnitud de -d-, operación realizada en figura aparte con objeto de facilitar la interpretación de los trazados. Suponiendo que el plano del cuadro pasa por el origen, -d- será la distancia existente entre el origen O y un plano paralelo al del cuadro que paso por P. Esto es lo que se resuelve en la (fig.38).

La horizontal h(h') que pasa por P nos da el punto H_2 y por él pasa la traza π_2 del plano paralelo al del cuadro que contiene al punto P. Abatiendo el triángulo rectángulo NOM, que en proyección es una recta, según el triángulo NO_oM se tiene el segmento -d- como la altura sobre la hipotenusa de este triángulo.

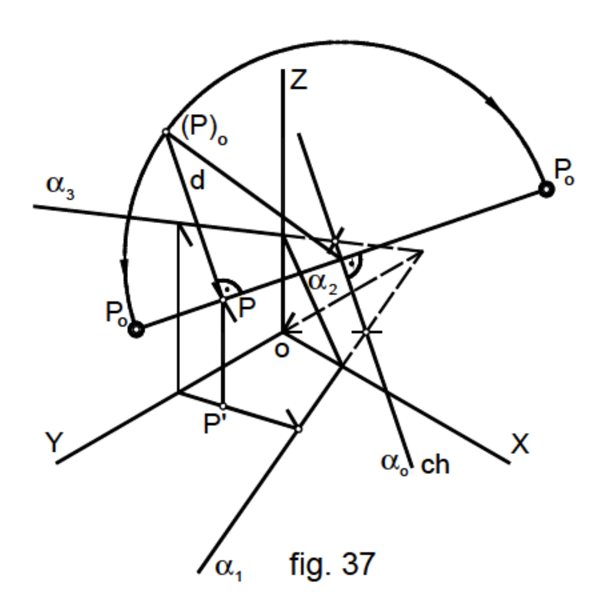


fig. 37

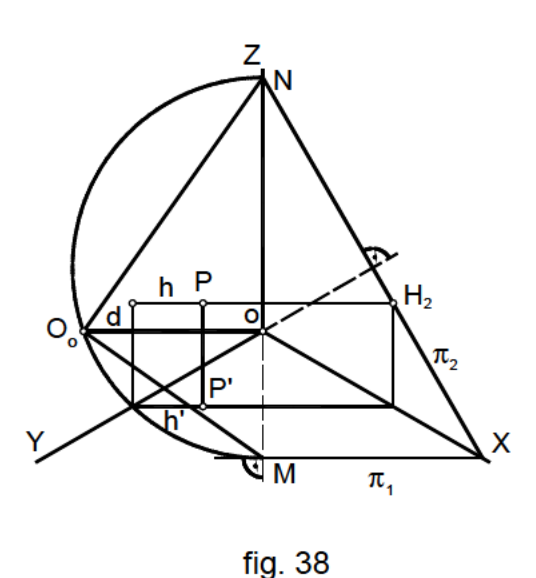


fig. 38

*. - Abatimiento de una recta, de un plano y de una figura.
Problema inverso.

Abatiremos en primer lugar el plano que contiene a la figura. La traza α_o es la charnela del abatimiento. Tomamos por ejemplo el punto 1(1'), donde α_1 corta al eje X y abatimos este punto según el procedimiento empleado en el apartado anterior. La traza α_1 del plano abatida es $(\alpha_1)_o$, ya que α_o es eje de afinidad entre las rectas del plano y sus respectivos abatimientos.

La dirección de afinidad es perpendicular a α_o. Trazando por el punto N de α_1 la perpendicular a α_o, se obtiene N_o en $(\alpha_1)_o$ y como N pertenece también a α_3, por le punto N_o pasa $(\alpha_3)_o$; esta traza queda definida por el punto N_o y por ser afín de α_3, por el punto en que ésta corta al eje de afinidad α_o.

El punto M abatido es M_o y la traza $(\alpha_2)_o$ une los puntos I_o y M_o. La verdadera magnitud del triángulo de trazas NM1 es el triángulo $N_oM_o1_o$.

Abatidas ya las tres trazas del plano y supuesta situada una figura cualquiera A-B-C-D (A'-B'-C'-D') en él, se puede obtener su verdadera forma $A_oB_oC_oD_o$ aplicando la afinidad existente entre la proyección directa de ABCD y el abatimiento $A_oB_oC_oD_o$. De la afinidad se conoce el eje α_o, la dirección y un par de puntos afines $1(1_o)$ o bien $M(M_o)$ entre otros. En la (fig.39) se resuelve esta afinidad con los elementos indicados. De la misma forma se resuelve el problema inverso del abatimiento o elevación de una figura plana. A partir de la figura abatida podremos obtener la proyección directa de dicha figura y de esta forma obtener su proyección horizontal, quedando así completamente definida.

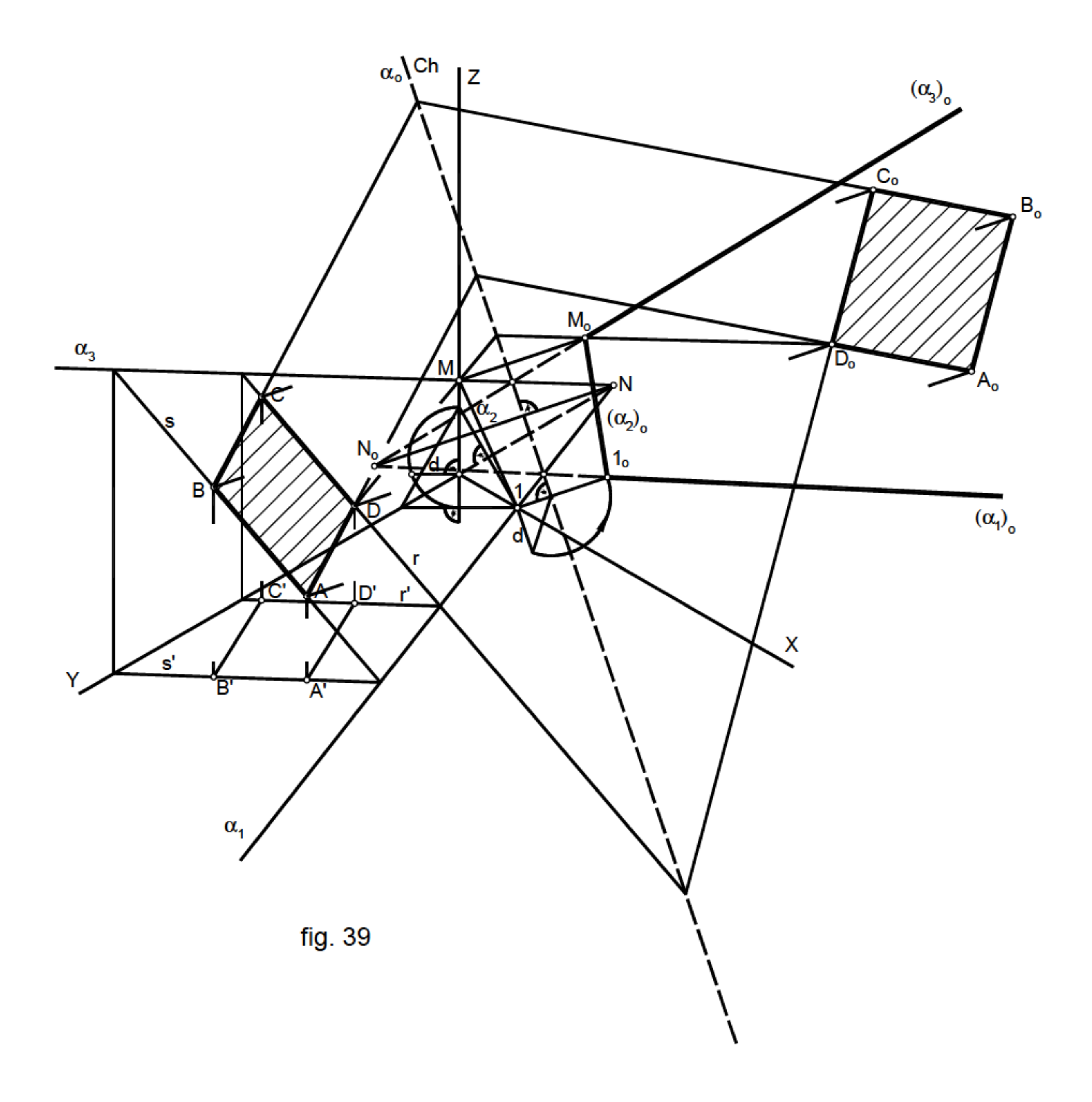

α₀
Ch
Z
(α₃)₀
C₀
B₀
M₀
D₀
A₀
α₃
M
N
C
α₂
(α₂)₀
s
N₀
1₀
B
d
1
D
(α₁)₀
d
r
C'
A
D'
r'
X
s'
Y
B'
A'
α₁

fig. 39

19. ÁNGULOS

*.- Angulo de dos rectas.

Sean las rectas r(r') y s(s'). Para determinar el ángulo que forman, se opera como en el Sistema Diédrico.

Hallamos la traza α_1 del plano que las rectas determinan, haciendo pasar la traza del plano por las trazas R_1 y S_1.

Abatimos el plano horizontal XOY sobre el cuadro, obteniendo $(R_1)_o$, $(S_1)_o$ y $(\alpha_1)_o$. Por el abatimiento de la proyección horizontal del vértice V_o' trazaremos la perpendicular y la paralela a la charnela $(\alpha_1)_o$, llevando sobre dicha paralela la verdadera magnitud -h_o- de la cota del punto V(V'). Realizamos así el abatimiento del vértice en V_o, uniremos este punto con las trazas abatidas $(R_1)_o$ y $(S_1)_o$, obteniéndose así los abatimientos de las rectas en r_o y s_o pudiendo apreciar así la verdadera magnitud del ángulo que forman (fig.40).

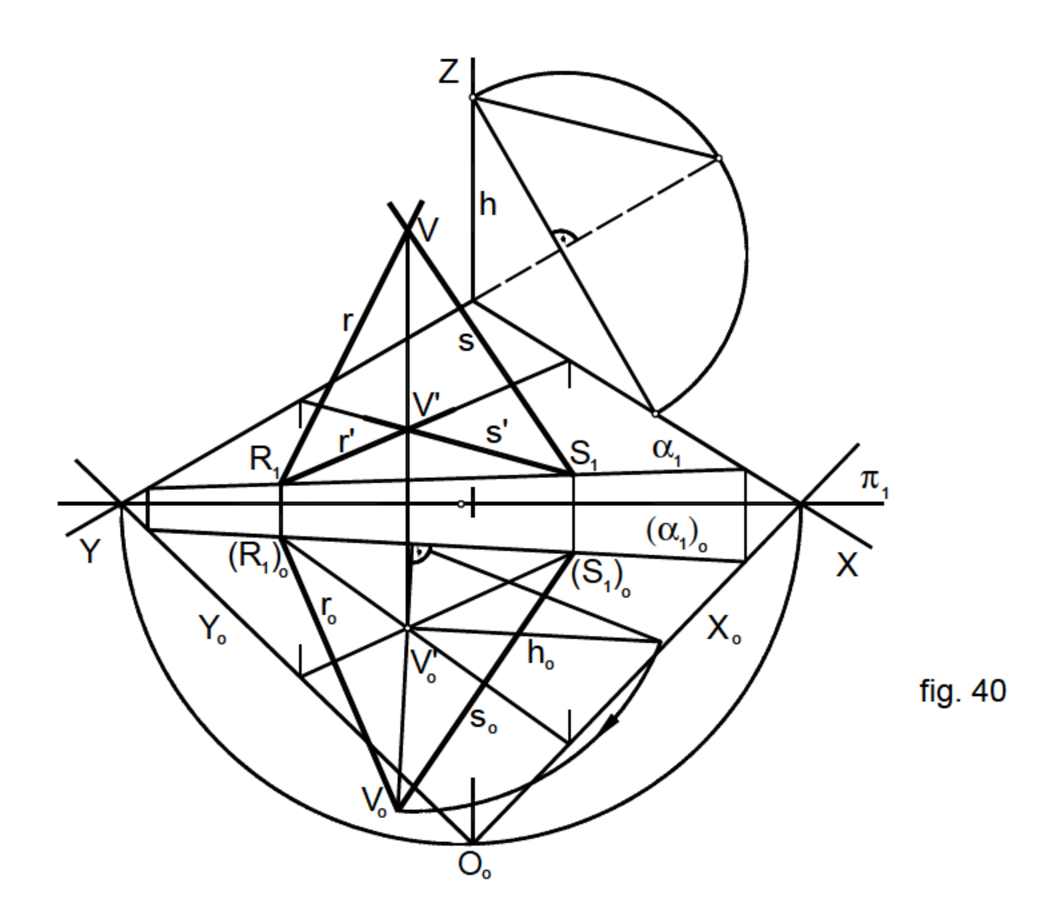


fig. 40

*.- Angulo de recta y plano.

*.- Angulo de dos planos.

Para la resolución de estos dos casos recurriremos a los planteamientos estudiados en el Sistema Diédrico, quedando así reducidos a “ángulo de dos rectas”.

*.- Angulo de una recta con los planos de proyección.

La recta r(r', r'', r'''), forma con cada uno de los planos de proyección, ángulos A, B, C, es decir los ángulos que forma la proyección directa -r- con cada una de las otras tres proyecciones. Para hallar la verdadera magnitud de estos ángulos basta realizar el abatimiento de cada uno de los planos proyectantes de la recta (figuras 41 y 42).

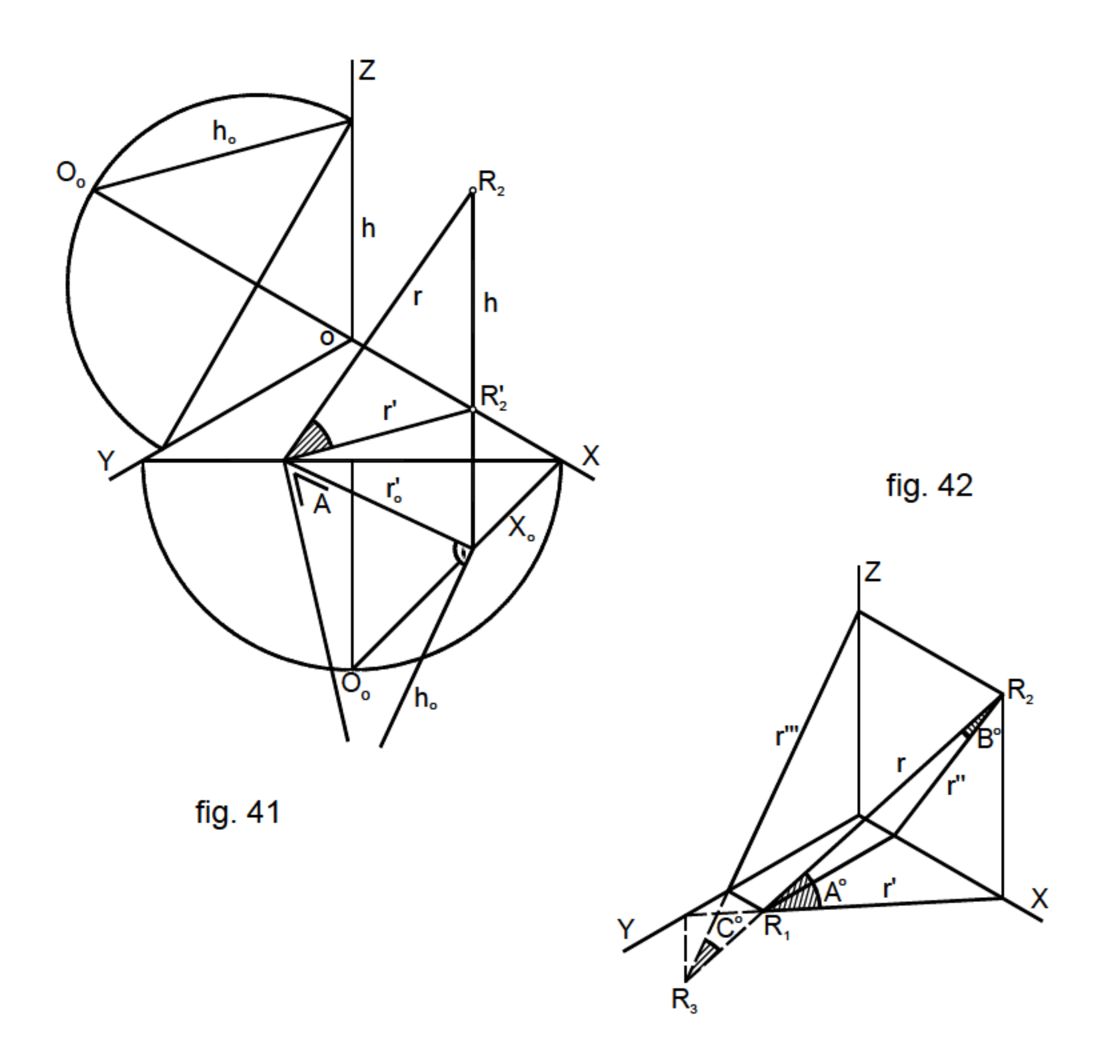


fig. 41

fig. 42

*.- Angulo de una recta con el cuadro.

Sea una recta oblicua (r-r'); se trata de hallar el ángulo que forma con el plano del cuadro, que en este caso suponemos que es el plano $\pi(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$.

Haciendo pasar por la recta el plano proyectante α_1 (α_2), hallamos la traza α_o que corta a r en su traza ordinaria o natural $R_o(R_o')$.

Tomemos un punto P(P') cualquiera de la recta y tracemos por él un plano π' paralelo al del cuadro; esto se consigue en la (fig. 43) con ayuda de la horizontal h(h') .

En el esquema adjunto vemos que el ángulo A que buscamos es el agudo de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es la distancia PR_o y uno de los catetos, el opuesto al ángulo A es equivalente a la diferencia de cotas ($h\pi_1$-$h\pi$), es decir, la distancia de P al plano π.

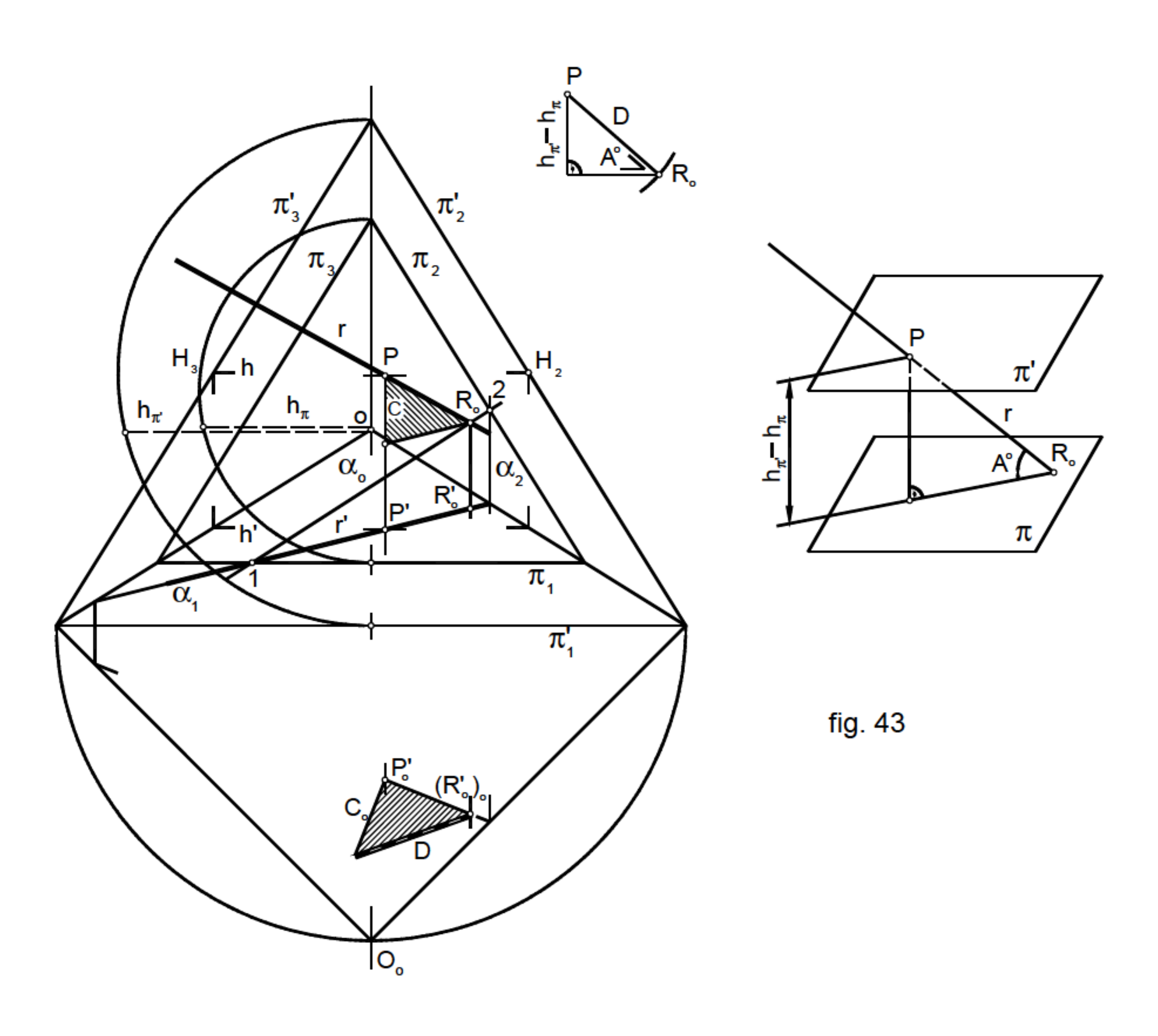


fig. 43

*. - Angulo de un plano con los de proyección.

Sea un plano $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; situemos en él un punto P(P') y tracemos por este punto la l.m.p. del plano α respecto del plano XOY; esta l.m.p. forma con este plano del triedro el mismo ángulo que el plano α. Ya se ha indicado como se traza la l.m.p., recta r(r'). Se realiza el abatimiento correspondiente y en él se obtiene la verdadera magnitud del ángulo buscado (fig.44).

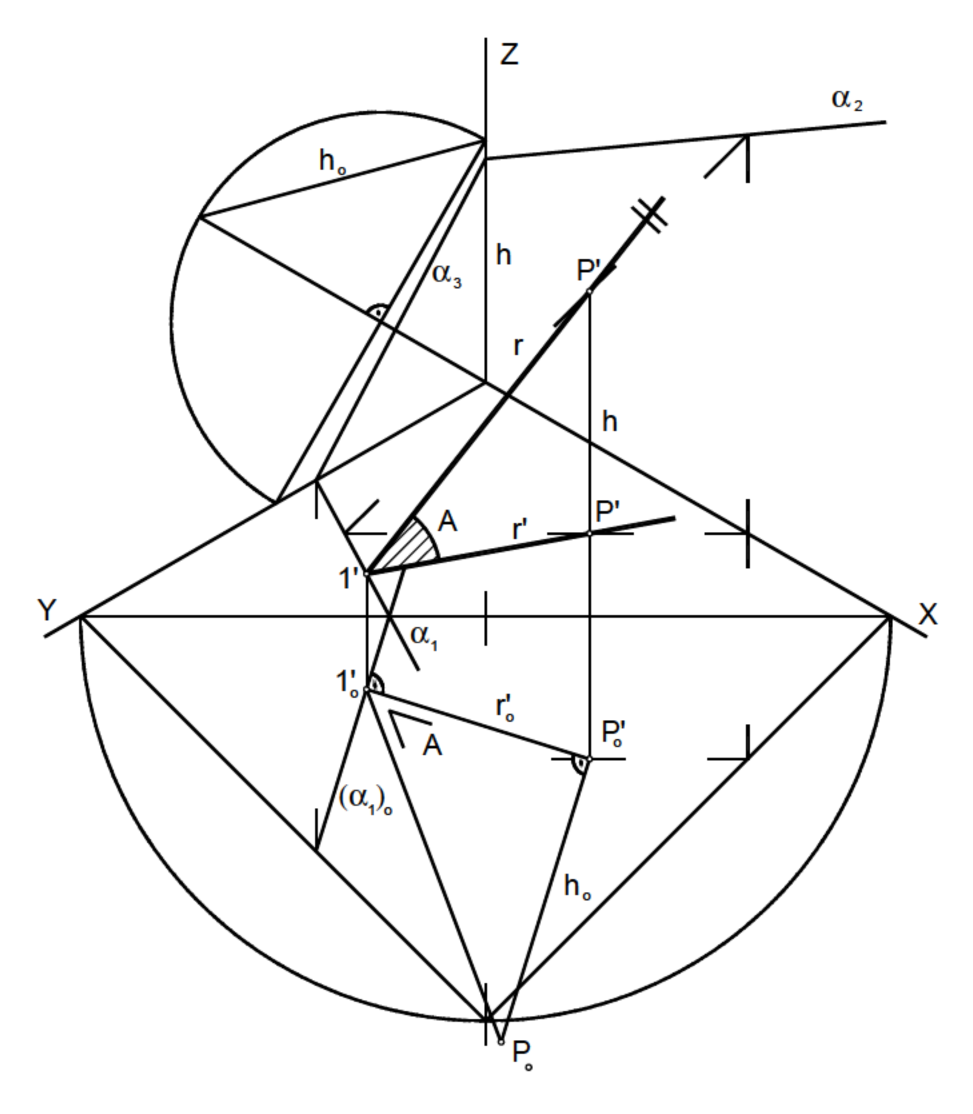


fig. 44

*.- Trazar un plano que forme un ángulo dado con el horizontal.

Basaremos la resolución en la construcción de un cono recto cuyas generatrices formen con el horizontal el ángulo deseado. Obtenido el cono, apoyaremos el plano en una de sus generatrices, convirtiéndose en una l.m.p., para lo cual trazaremos α_1 tangente a la directriz del cono y haremos pasar el plano por el vértice V. Construcciones realizadas en la (fig.45).

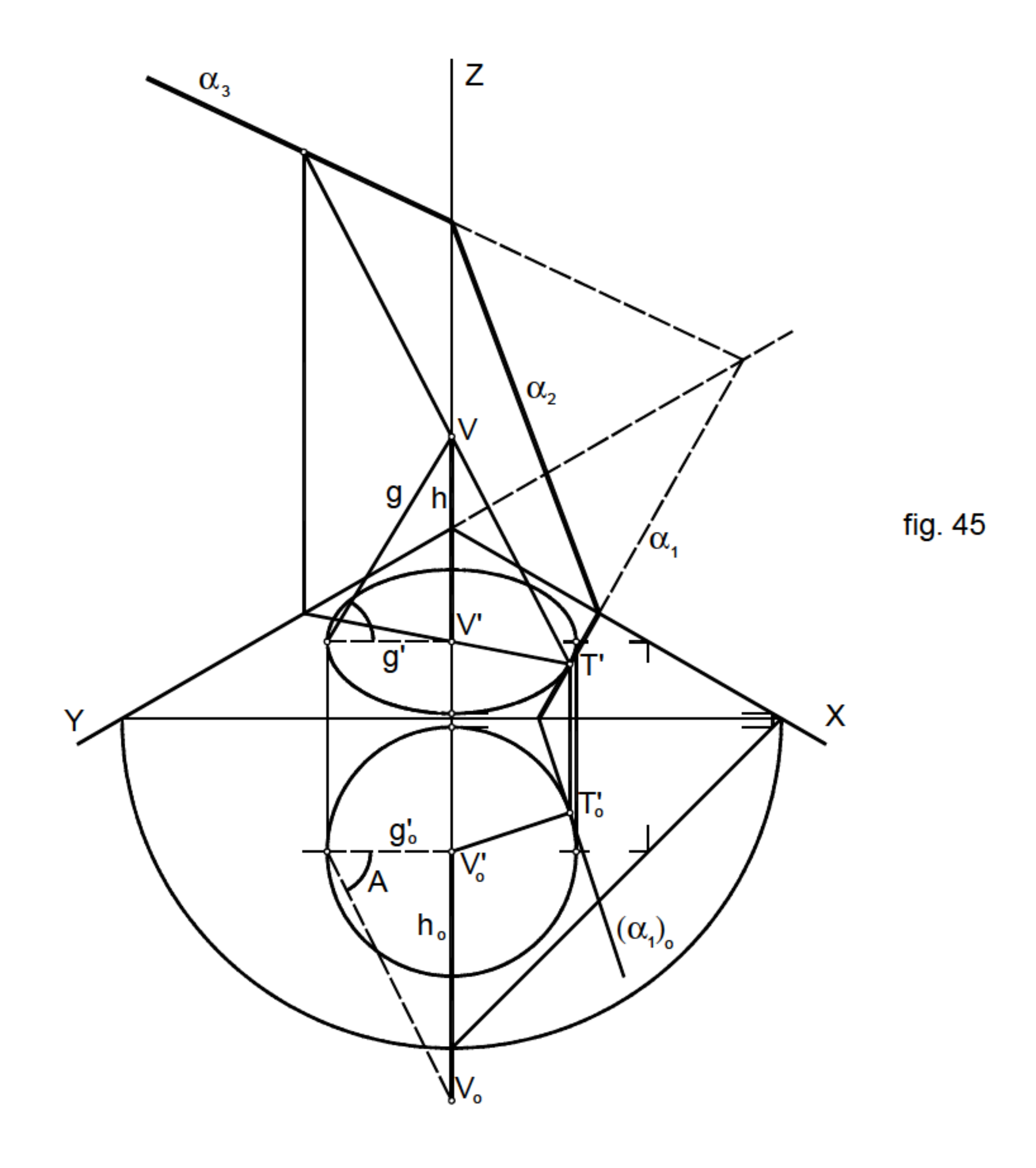
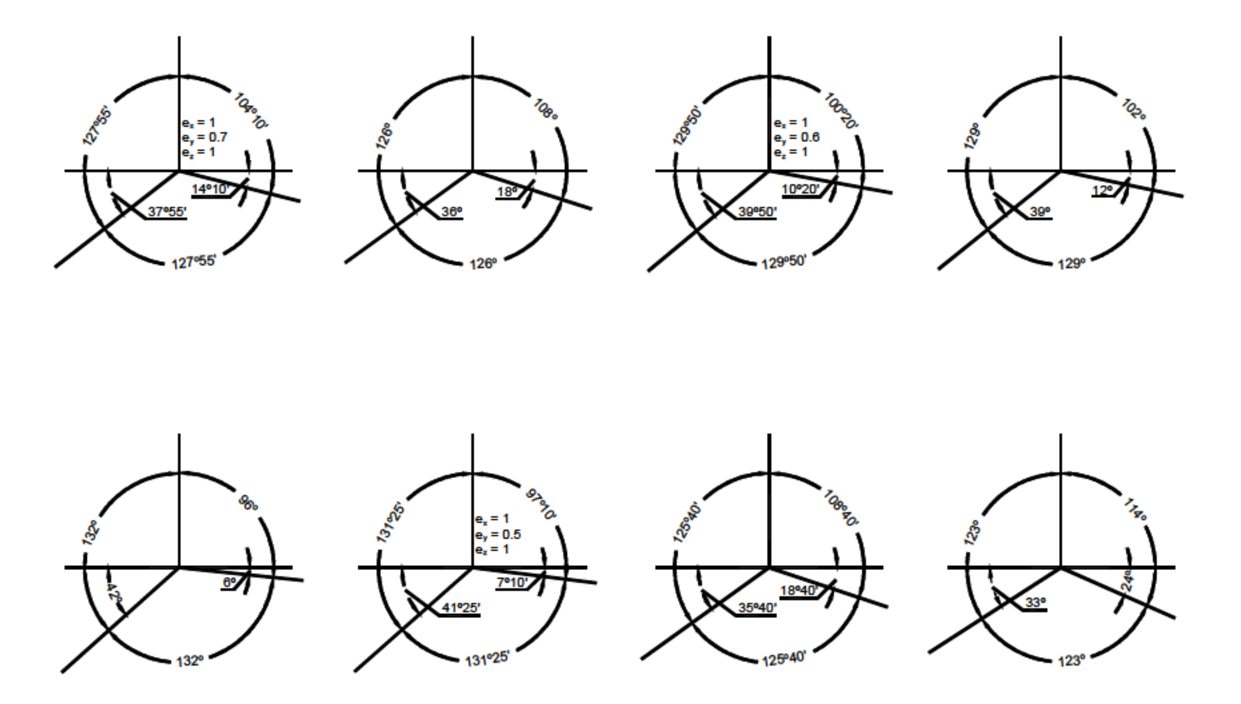


fig. 45

Aparte de los valores normalizados para los ángulos de los ejes, recogidos en la norma UNE 1031, en la figura siguiente aparecen otros valores de uso frecuente.



*.- Construcción de la circunferencia en perspectiva axonométrica.

(Seis métodos) en la (fig. 46).

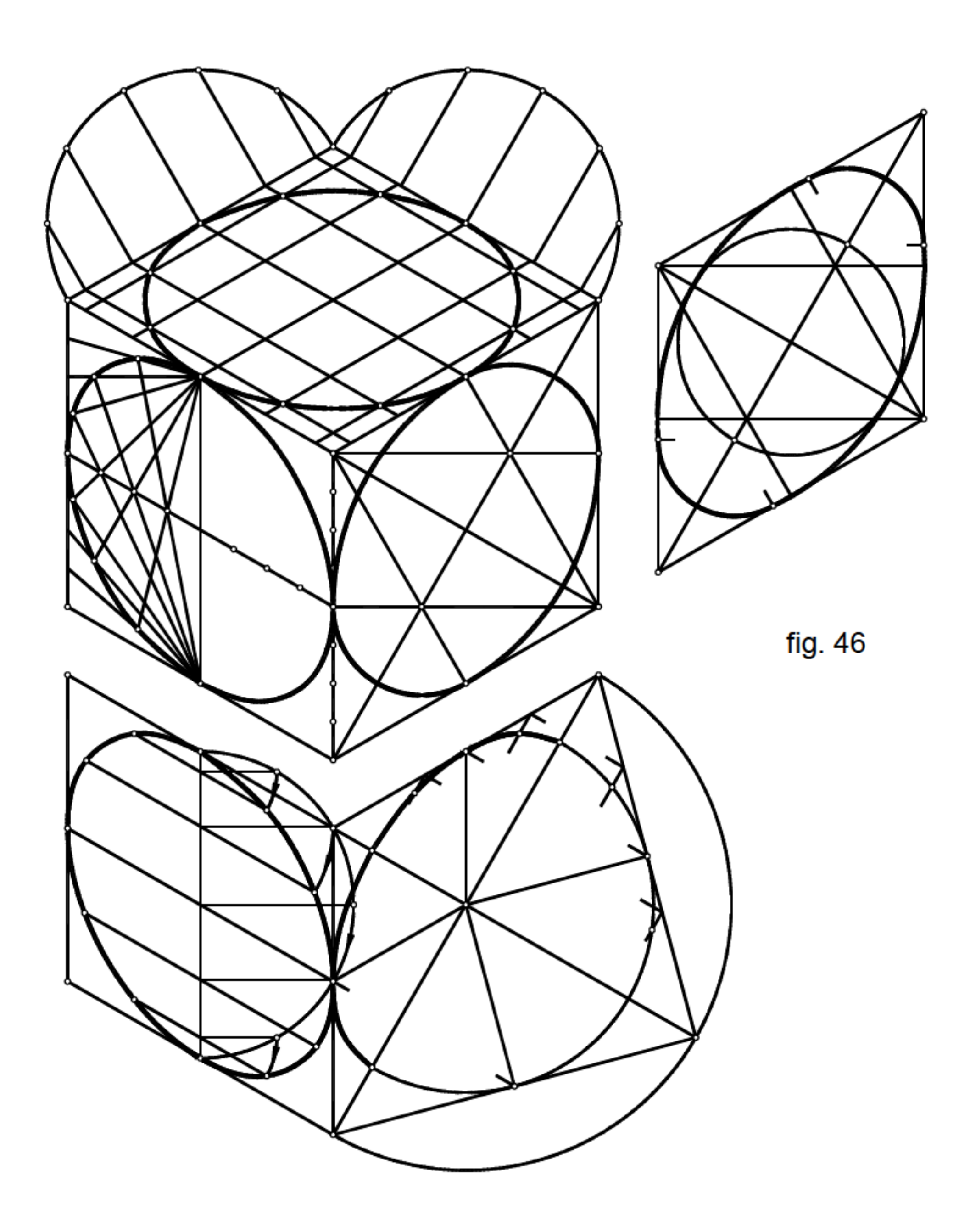


fig. 46

20. REPRESENTACIÓN AXONOMÉTRICA DE LOS POLIEDROS

*.- Tetraedro con una cara sobre un plano del sistema.

En la (fig.47) aparece representado el tetraedro con una cara apoyada en el plano XOY, en dibujo aparte se obtienen, la altura h_1 del tetraedro y la mínima distancia h entre dos aristas opuestas (ver sistema diédrico).

Colocamos una arista cualquiera AB paralela al eje Y, fijamos el punto medio N de AB y por él trazamos NC paralela al eje X e igual a la altura de la cara. Determinamos el punto O, tal que ON sea 1/3 de NC y por el trazamos la recta paralela al eje Z, sobre la que elevamos la altura h_1 del poliedro. Quedan así determinados sus cuatro vértices ABCD .

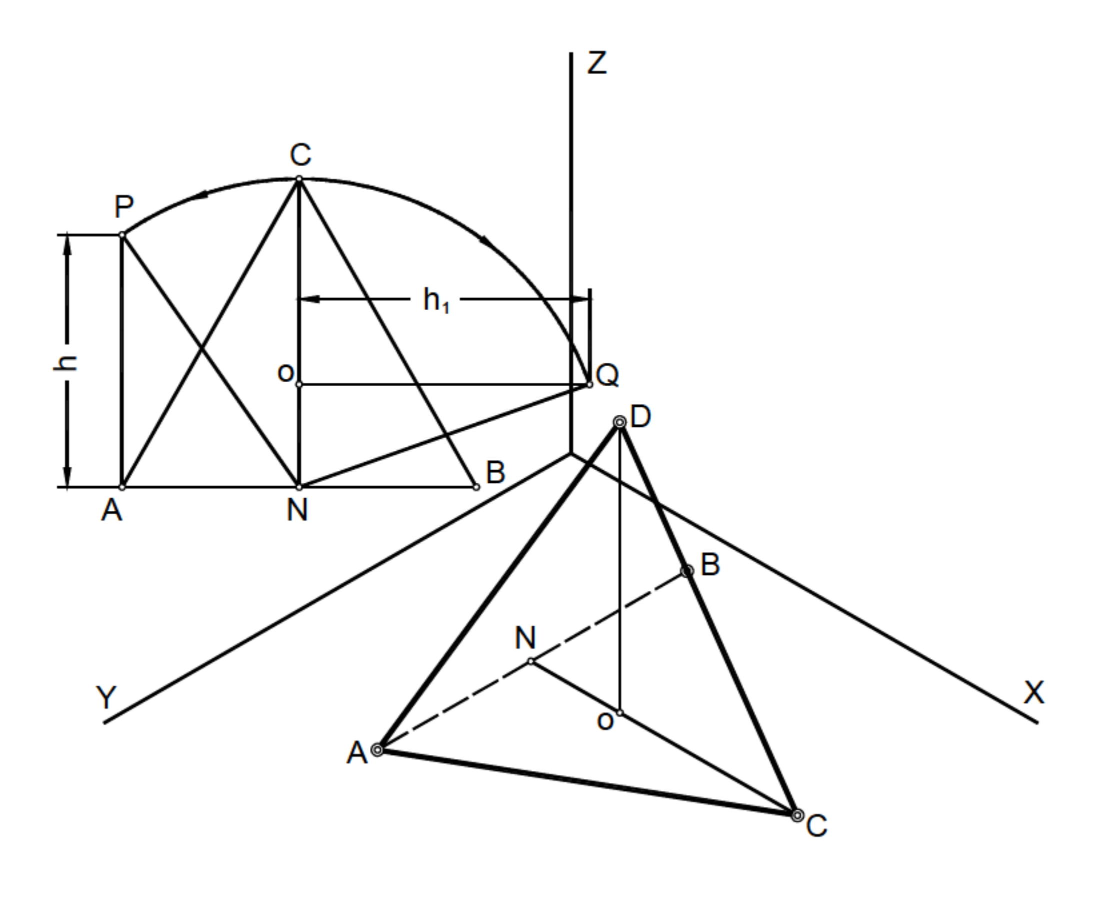


fig. 47

*. - Tetraedro y cubo con una cara en uno de los planos de proyección.

Supuesto el tetraedro con una cara en el plano XOY (fig.48), abatimos este plano sobre el cuadro; en el abatimiento situamos la base 1_o, 2_o y 3_o; y obtenemos en proyección directa 1, 2 y 3 por medio de la afinidad.

Por el centro C, afín de C_o y centro de la base, se traza la altura, que en este caso será paralela al eje Z y sobre ella se toma el segmento h, previamente reducido sobre este eje, obteniendo el cuarto vértice 4.

De la misma forma se obtendrá la proyección directa de un cubo (fig.49), en esta ocasión con una cara en el plano XOZ; construida la base en el abatimiento, se obtiene por afinidad la proyección 1, 2, 3 y 4 de la cara apoyada, y sobre paralelas al eje y trazadas por estos puntos, se eleva la arista reducida, según el referido eje, obteniéndose la cara paralela a la apoyada 5, 6, 7 y 8.

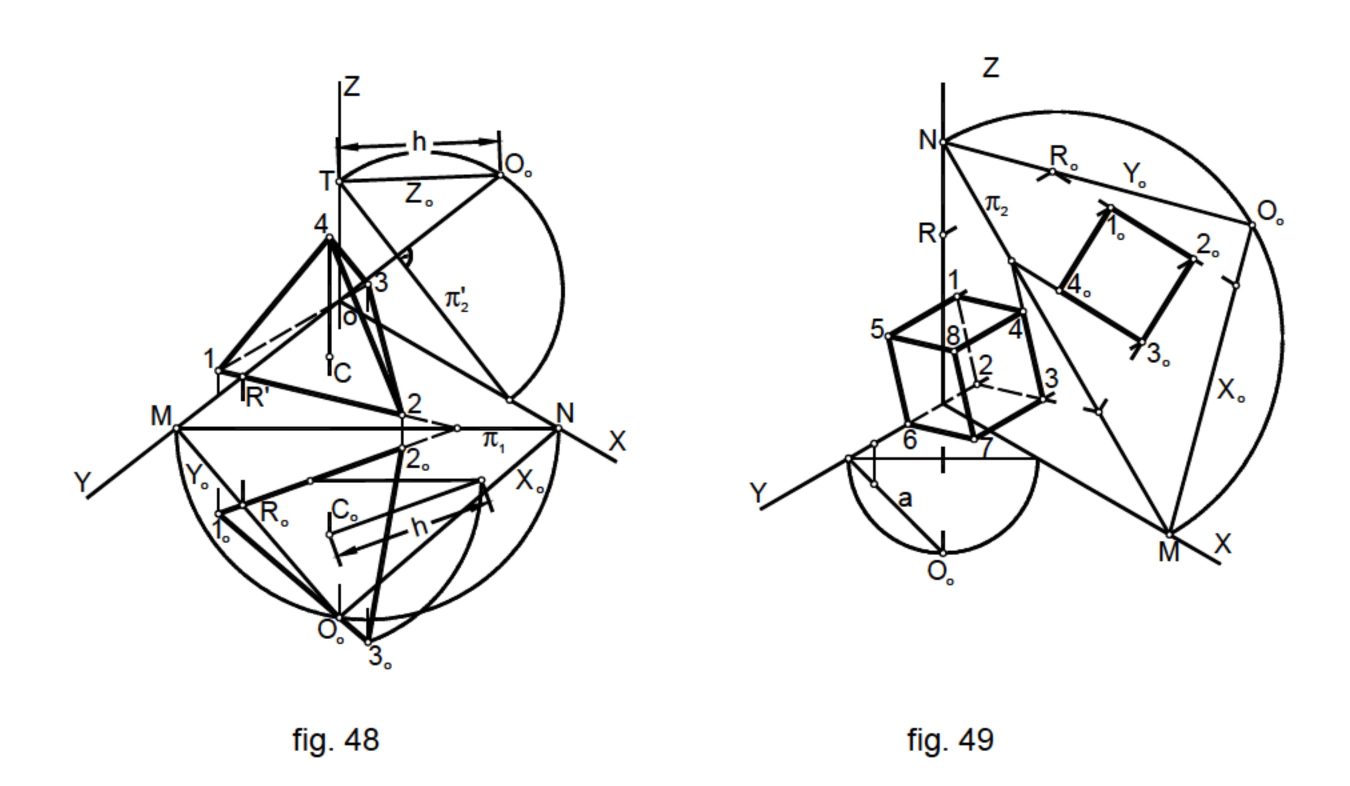


fig. 48 fig. 49

*.- Tetraedro, con una cara sobre un plano paralelo a un eje.

El plano $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ paralelo al eje Z, es el que contiene a una de las caras; según esto, abatimos este plano, haciéndolo primero con $(\alpha_1)_o$, obteniendo $(\alpha_2)_o$ y $(\alpha_3)_o$ trazándole las perpendiculares por los extremos limitados por los ejes Y_o, X_o. Situado el triángulo equilátero 1_o, 2_o, 3_o de la base, se refiere a $(\alpha_1)_o$, en $1_o'$, $2_o'$, $3_o'$, y de estos por afinidad a 1', 2', 3' sobre α_1 por medio de paralelas al eje Z; las cotas de estos puntos sobre el plano XOY están en verdadera magnitud en el abatimiento, es decir, $1_o1_o'$, $2_o2_o'$, $3_o3_o'$ se reducen según el eje Z y se obtendrán los vértices de la base 1, 2, 3. Por el centro C(C') se traza la recta p(p') perpendicular al plano α, sobre ella llevaremos previamente reducida la magnitud h de la altura, obteniéndose así el vértice 4, que uniremos con los obtenidos anteriormente (fig.50).

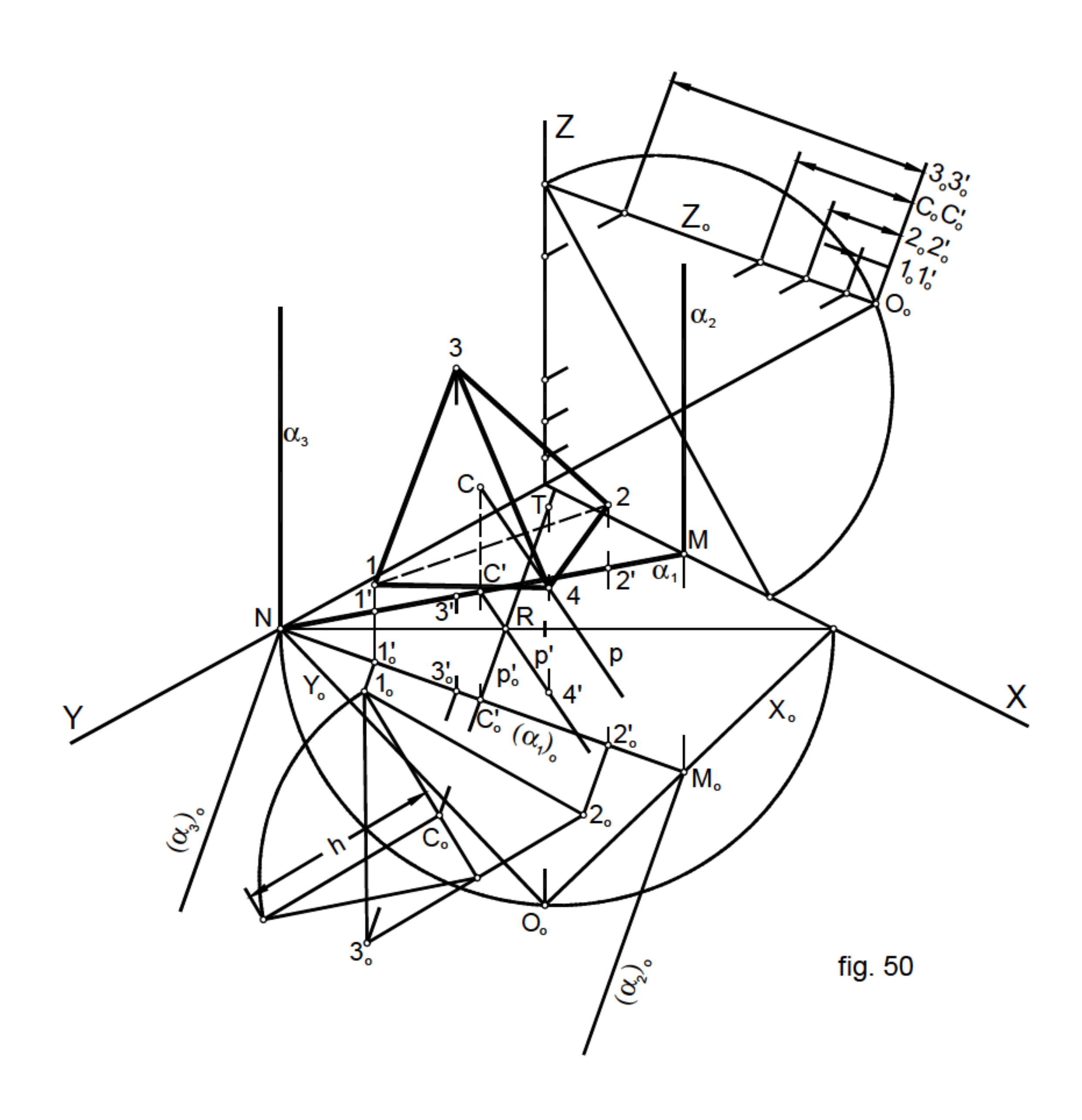


fig. 50

*. - Octaedro con las diagonales paralelas a los ejes, sección.

En la (fig.51) resolvemos el problema de aplicación siguiente: En un sistema axonométrico, un plano paralelo al cuadro, tiene como triángulo de trazas, uno cuyos lados miden π'_1=54mm., π'_2=64mm. y π'_3=73mm. Determinar: a) Las proyecciones de los ejes del sistema, b) La proyección en este sistema de un octaedro con las diagonales paralelas a los ejes, de 47mm. de arista. y centro, en el punto C(42,34,21). Verdadera magnitud de la sección producida en dicho octaedro por el plano proyectante del eje Z respecto del plano del cuadro.

Trazamos el plano cuyos lados son π'_1, π'_2 y π'_3. Los ejes XYZ son las alturas de este triángulo. Situado el punto C a partir de sus coordenadas, se trazan por él las paralelas a los ejes y se lleva en ellas a partir de C en ambos sentidos la semidiagonal debidamente reducida respecto a cada eje; de esta forma se obtienen los seis vértices del poliedro. La sección que produce el plano proyectante del eje Z, se obtiene abatida, con solo abatir el triángulo rectángulo en O_o y referir los puntos en que la traza del plano corta en proyección a las aristas del poliedro.

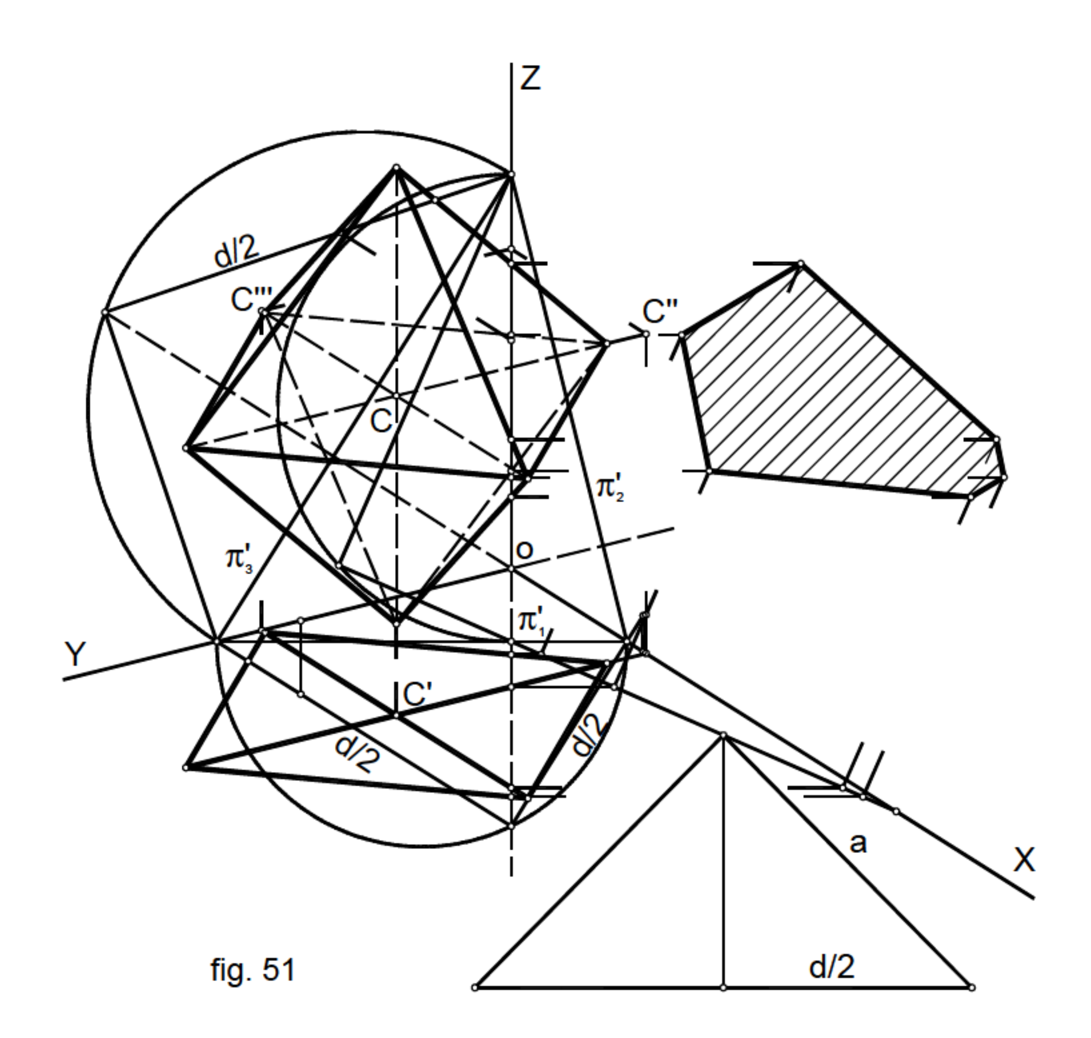
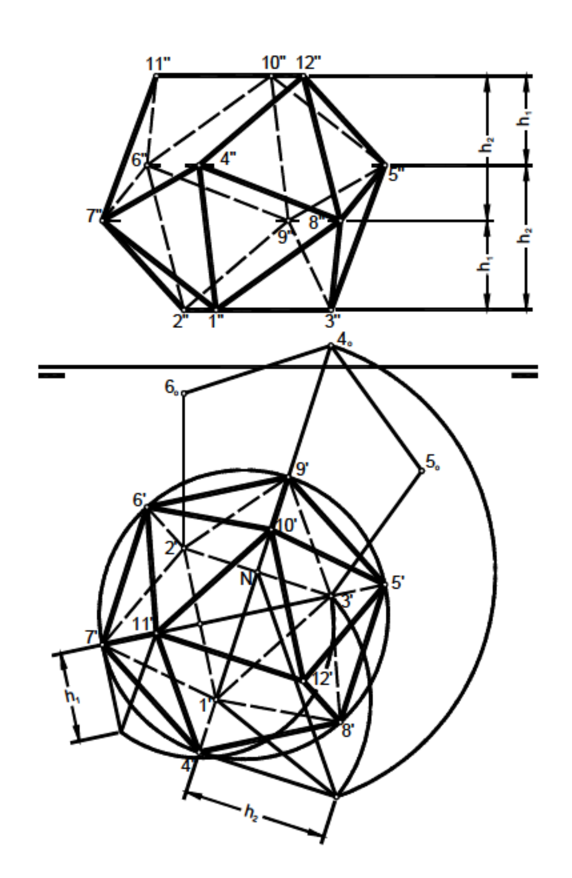


fig. 51

*.- Icosaedro con dos caras paralelas a uno de los planos de proyección.

Refiriéndonos a la (fig.52), representamos en su parte izquierda las proyecciones diédricas del poliedro, con dos caras paralelas al plano horizontal y en la parte derecha, las proyecciones directa y horizontal en axonométrico. A la cara inferior 1, 2, 3 se le ha fijado la cota H y a las otras tres plantas de vértices, las alturas indicadas en acotación.

Representamos primero la proyección sobre el XOY, puntos 1', 2', 3', ..., 12' y después sobre paralelas al eje Z trazadas por ella se toman las alturas correspondientes, es decir: H para (1, 2, 3), $H+h_1$ para (7, 8, 9), $H+h_2$ para (4, 5, 6) y por último $H+h_1+h_2$ para los puntos (10, 11,12).



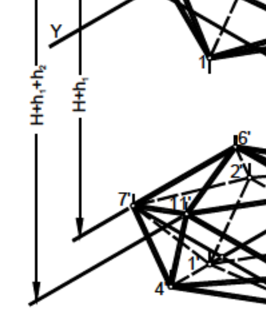


fig.52

*.- Dodecaedro con dos caras paralelas a uno de los planos de proyección -sección por proyectante-.

En la (fig.53) realizamos la representación diédrica y axonométrica de un dodecaedro, esta última pasando punto a punto los de la primera situados sobre el plano horizontal 1', 2', 3', ..., 20' y por éstos trazando referencias paralelas al eje Z, sobre las que llevamos las cotas correspondientes a cada punto de la proyección directa del poliedro, es decir: H_1 para (1, 2, 3, 4, 5), H_1+h para (6, 7, 8, 9, 10), H_1+H para (11, 12, 13, 14, 15), y por último H_1+H+h para los puntos (16, 17, 18, 19, 20). Se ha realizado también la sección producida por un plano proyectante vertical.

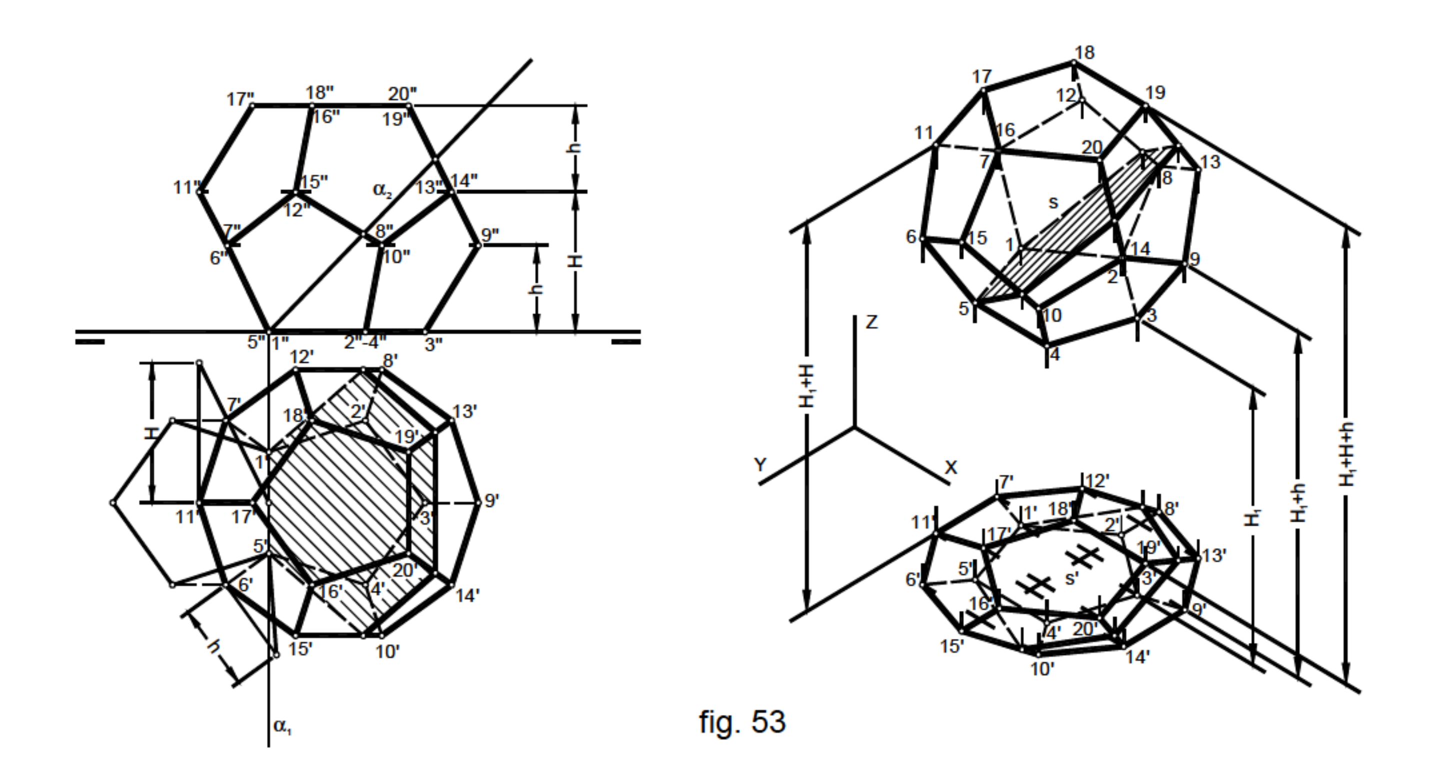


fig. 53

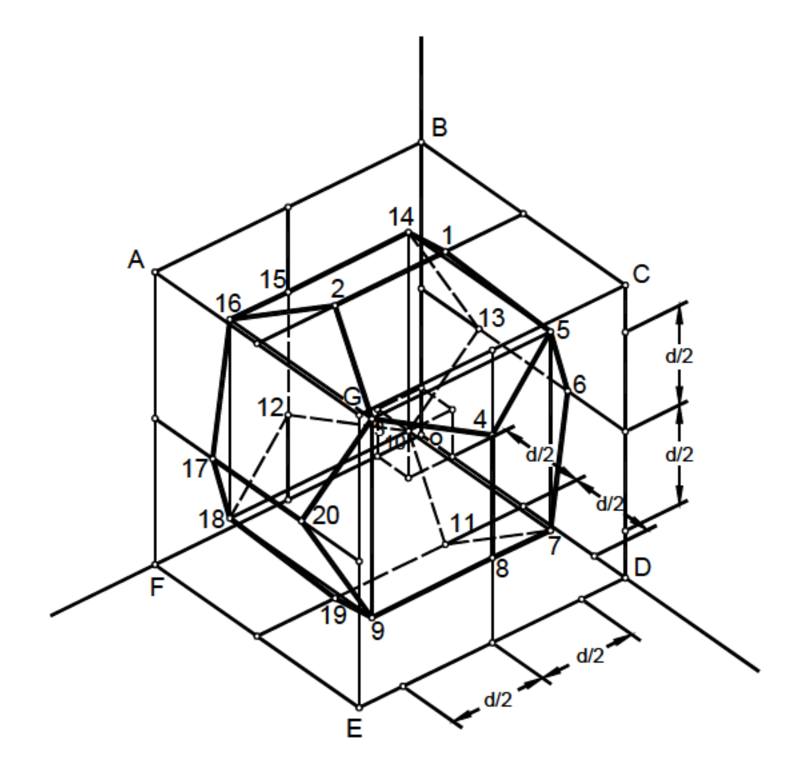
*.- Dodecaedro inscrito en un cubo.

Supongamos el cubo de arista -a.- que tiene por vértices los puntos ABCGEDOF. Para calcular la arista l del dodecaedro, obtenemos segmento aúreo de -a.- tal como se indica en la parte derecha de la (fig.54).

Obtenido el segmento -l-, vamos a inscribir el dodecaedro en el cubo.

Los vértices 1 y 2 - 11 y 19 - 13 y 6 - 17 y 20 - 4 y 8 - 12 y 15 se encuentran en las paralelas medias de las caras ABCG, ODEF, BCDO, AGEF, GCDE y ABOF respectivamente, de tal manera que por ejemplo 1-2 sea igual a -l- reducido convenientemente.

Faltan aún ocho vértices, que son precisamente los vértices de un cubo interior al dado, concéntrico con él, de vértices (14, 5, 3, 16, 10, 7, 9, 18). Para obtener este cubo se toma a partir del punto medio de la arista del segmento d/2 y con el segmento ON se construye un cubo, cuyo vértice 10, opuesto al O es uno de los del cubo buscado. A partir de él se construye con la arista -d-, obteniéndose así los vértices antes apuntados.



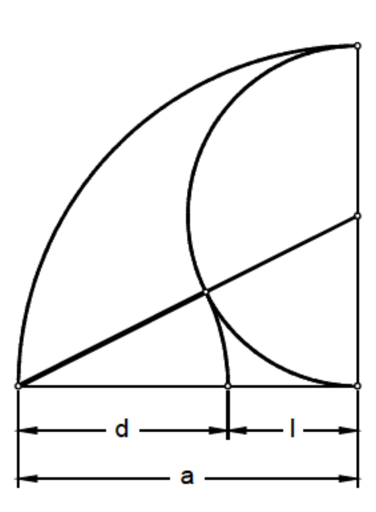


fig. 54

*.- Tetraedro con una cara sobre un plano oblicuo.

El plano sobre el que situamos una cara es el $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; abatimos el plano, tomando el punto 1 (Ver abatimientos).

Situado el triángulo $A_oB_oC_o$ y el centro N_o, desabatimos por afinidad los cuatro puntos, obteniendo A, B, C y N. Trazamos la recta. p(p') perpendicular al plano α, sobre ella colocamos la altura -h- del poliedro y así obtenemos el cuarto vértice D; hemos tomado previamente un punto M(M') de p(p'), abatido M' en M'_o tomamos sobre la perpendicular a p'_o y a partir de M'_o la diferencia de cotas Z_o y sobre N'_oM_o y a partir de N'_o el segmento -h-, determinando el extremo D_o y por consiguiente D.

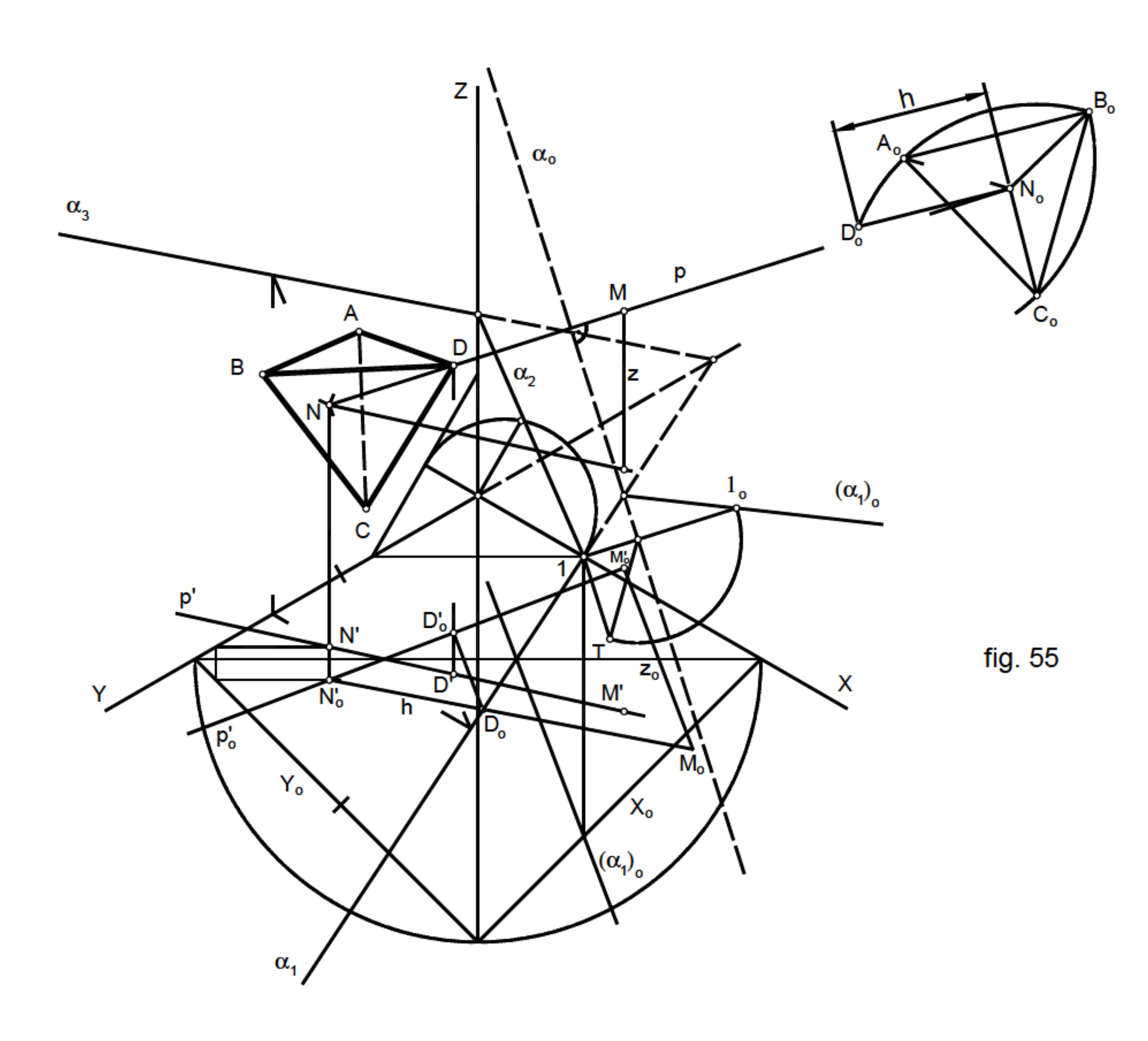


fig. 55

*.- Cubo con una cara sobre un plano oblicuo.

Para resolver este caso se han seguido los trazados realizados en la (fig.56).

Se coloca el cuadrado de la cara apoyada según $1_o2_o3_o4_o$ obteniéndose al desabatirlos los puntos 1, 2, 3, 4 por los que trazamos rectas perpendiculares al plano de la cara, llevando sobre ella la arista -a- convenientemente reducida. Se obtienen así los vértices del cuadrado paralelo al apoyado 5, 6, 7, 8 completándose los ocho vértices del poliedro.

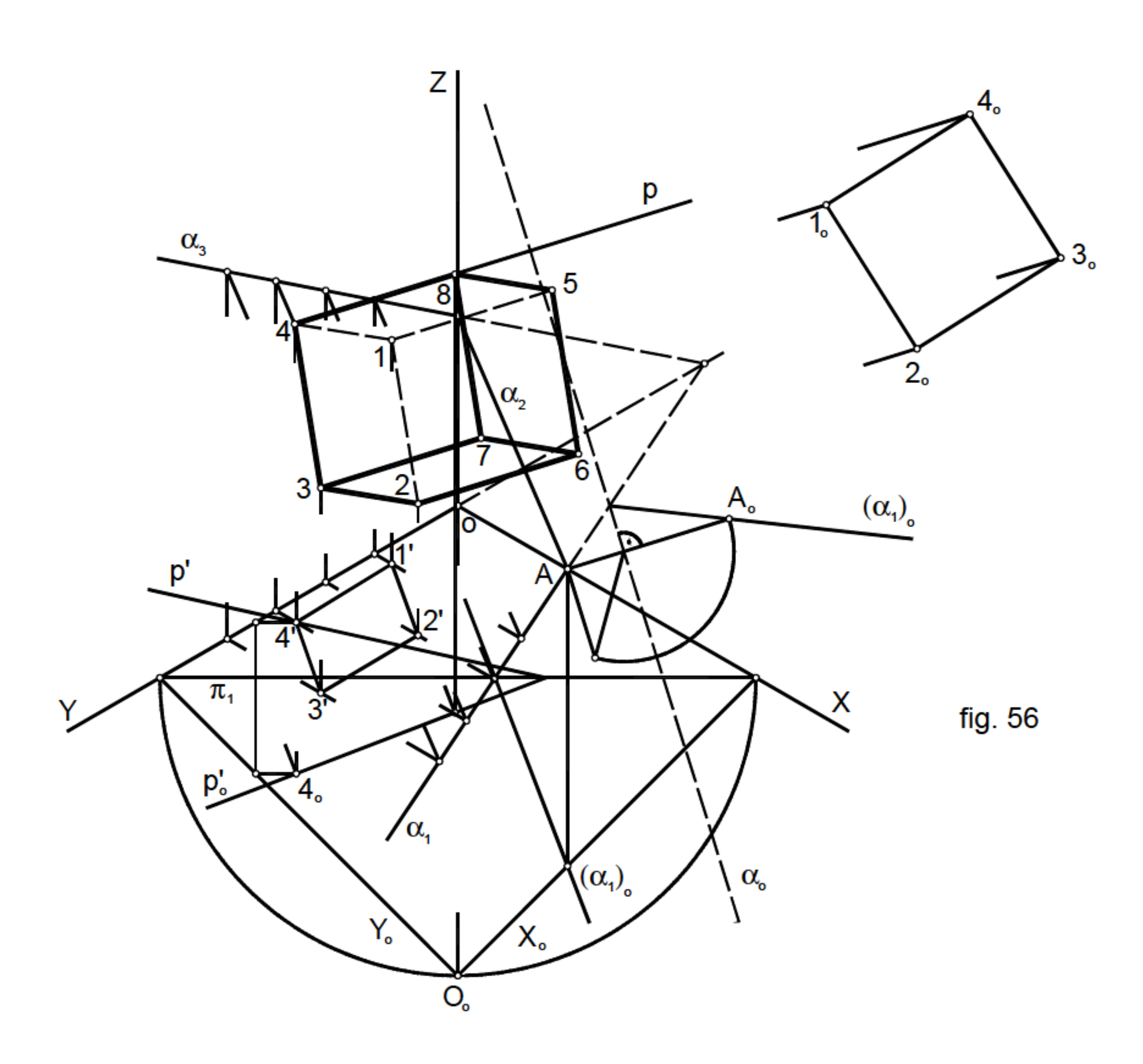


fig. 56

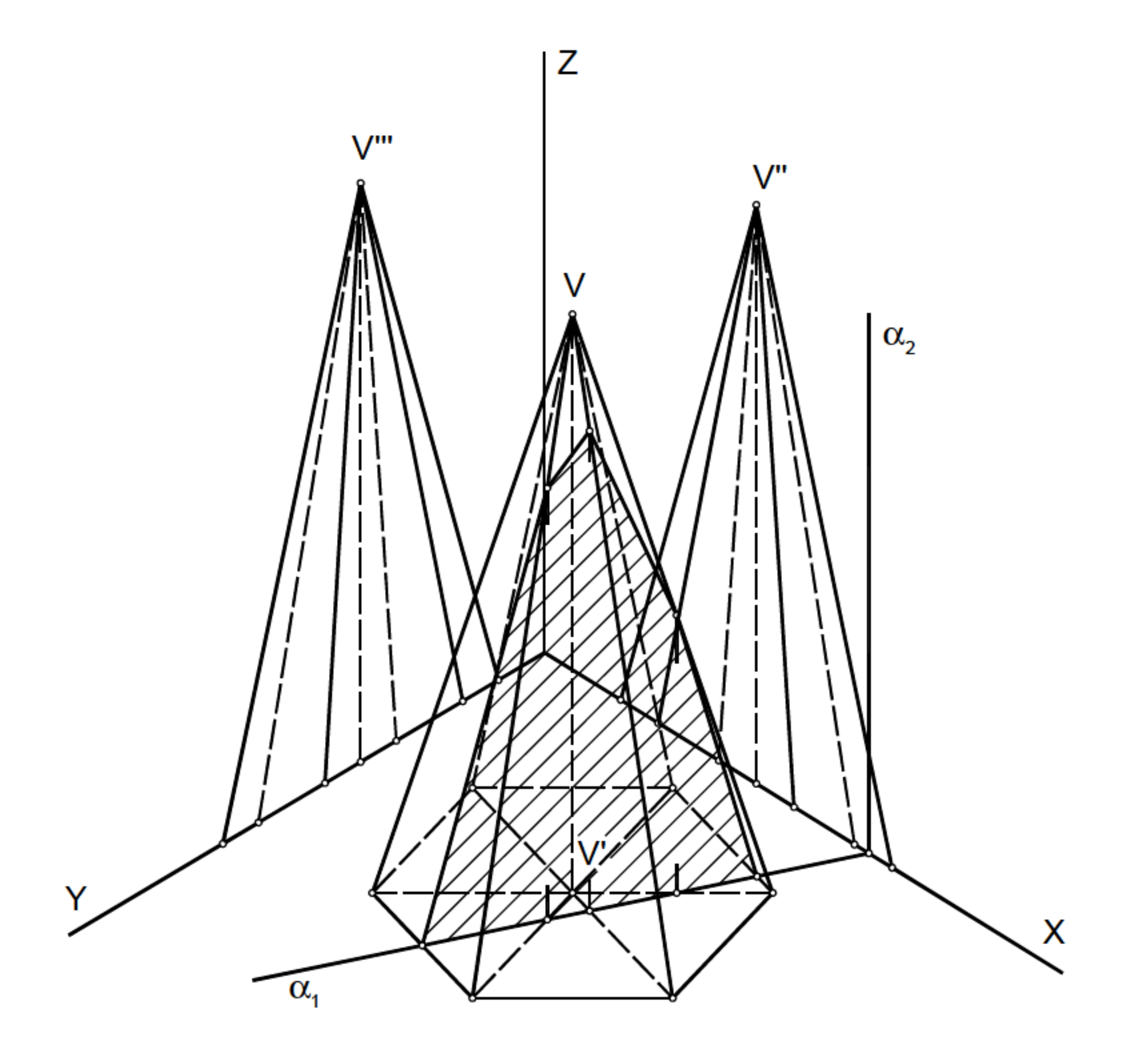
21. REPRESENTACIÓN AXONOMÉTRICA DE SUPERFICIES RADIADAS Y ESFERA

SECCIONES, INTERSECCIÓN CON RECTAS.

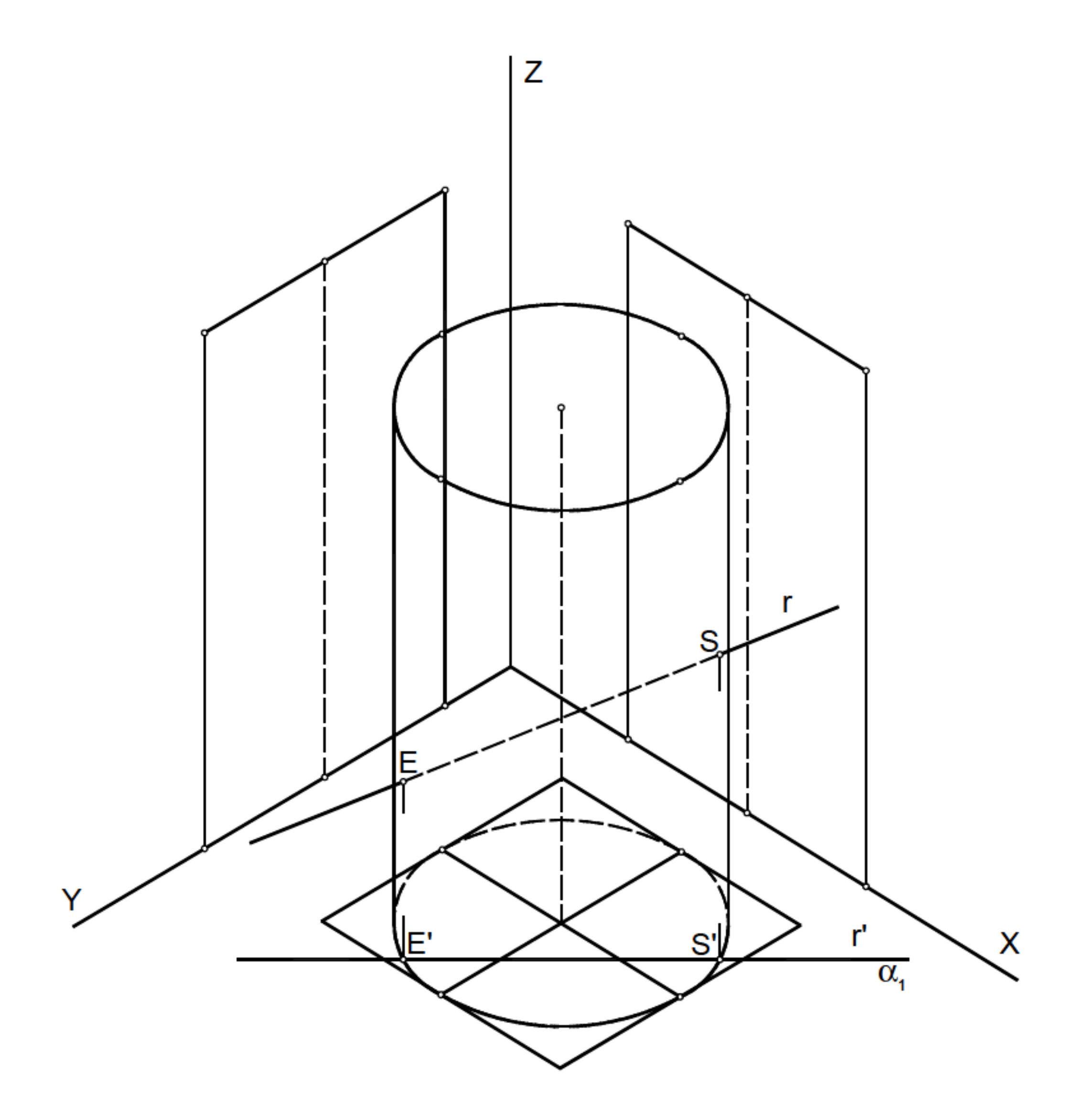
Supuesto al lector en posesión de los conocimientos precisos de Geometría del espacio y de los anteriormente expuestos, por sí solo podrá interpretar los dibujos que ilustran este apartado.

*. - Proyecciones de una pirámide regular.

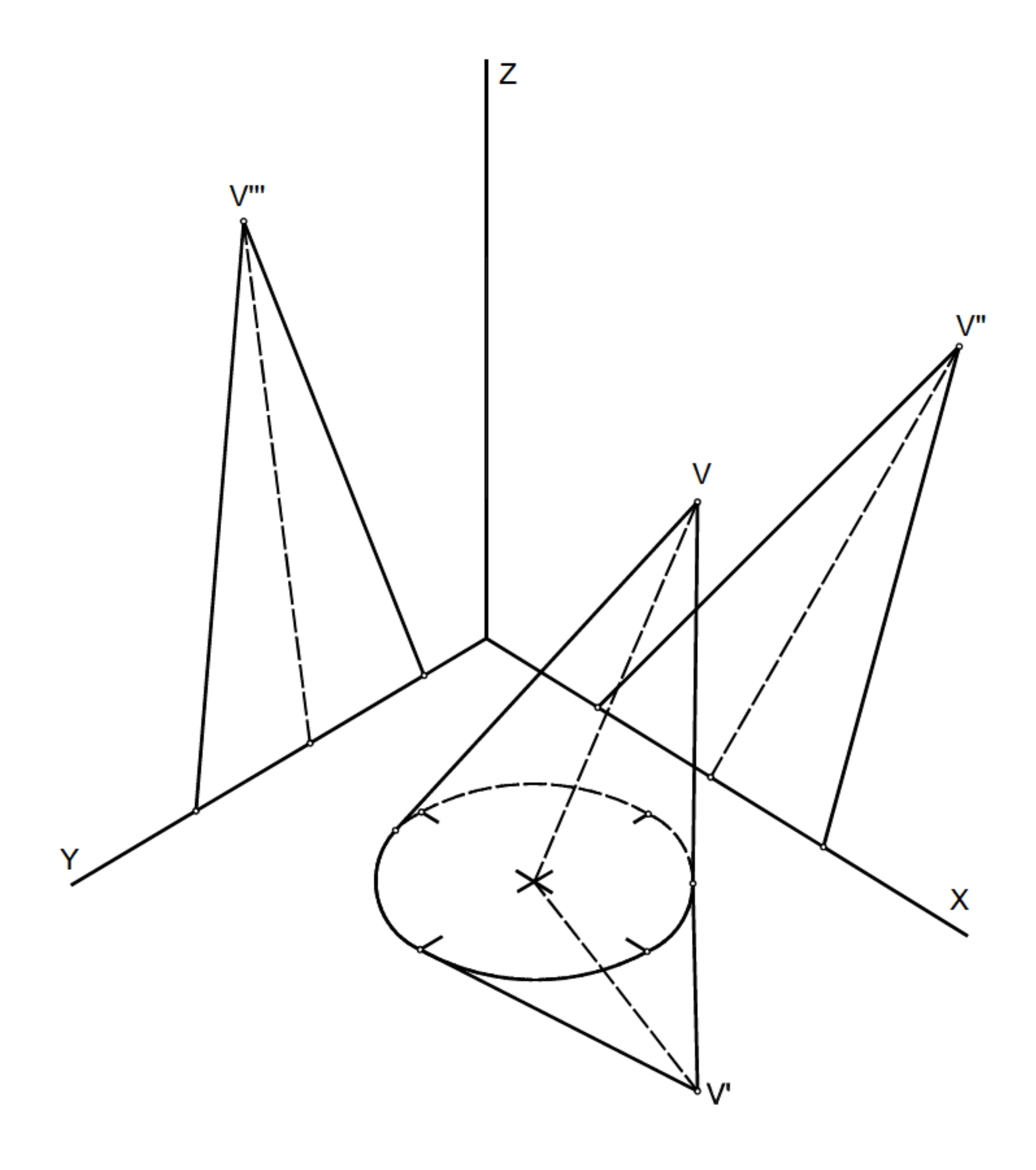
Sección por proyectantes.



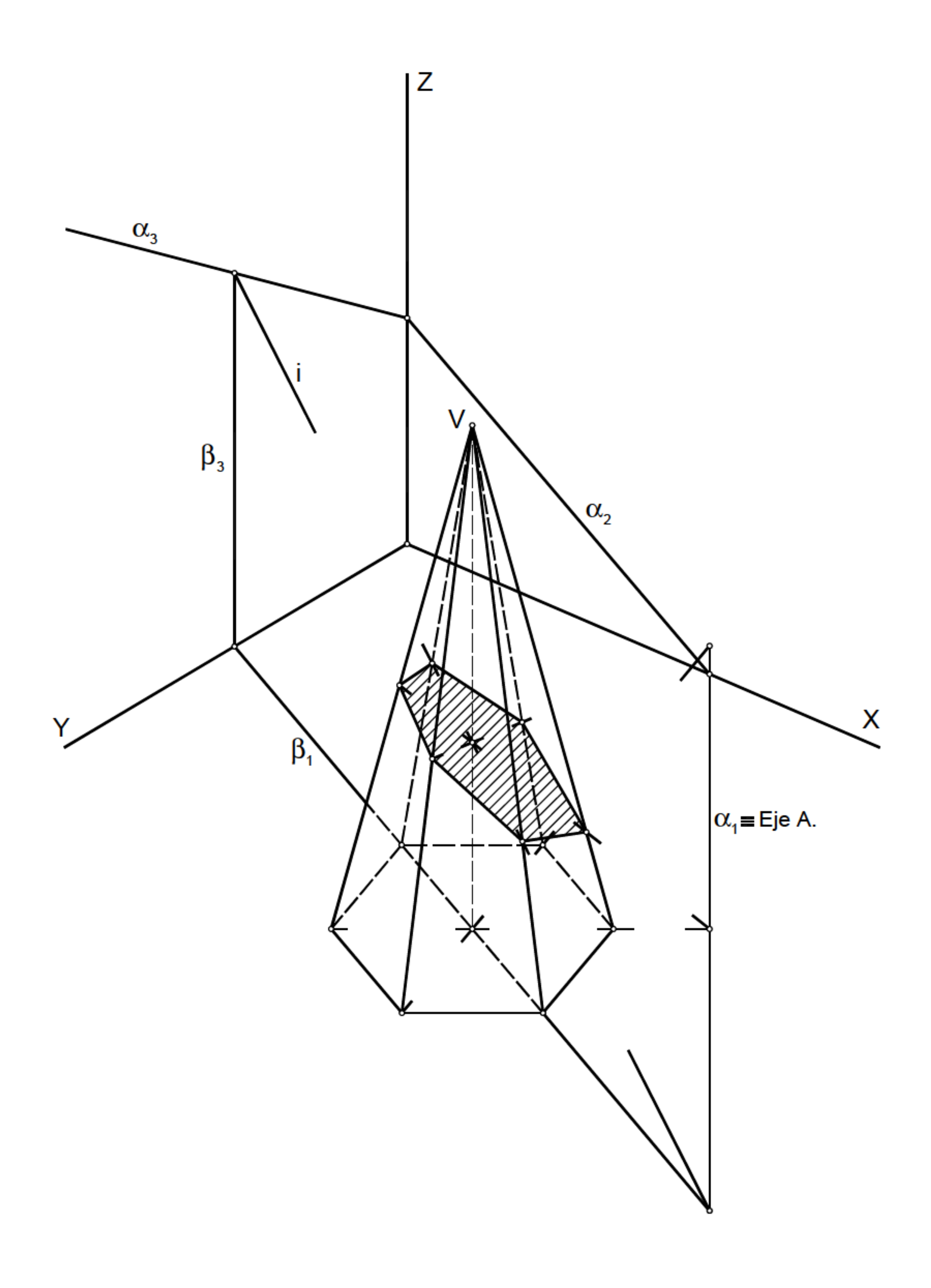
*.- Cilindro recto, puntos de intersección con una recta.



*.- Cono oblicuo, representación y proyecciones.



*.- Pirámide recta. Sección por plano oblicuo.

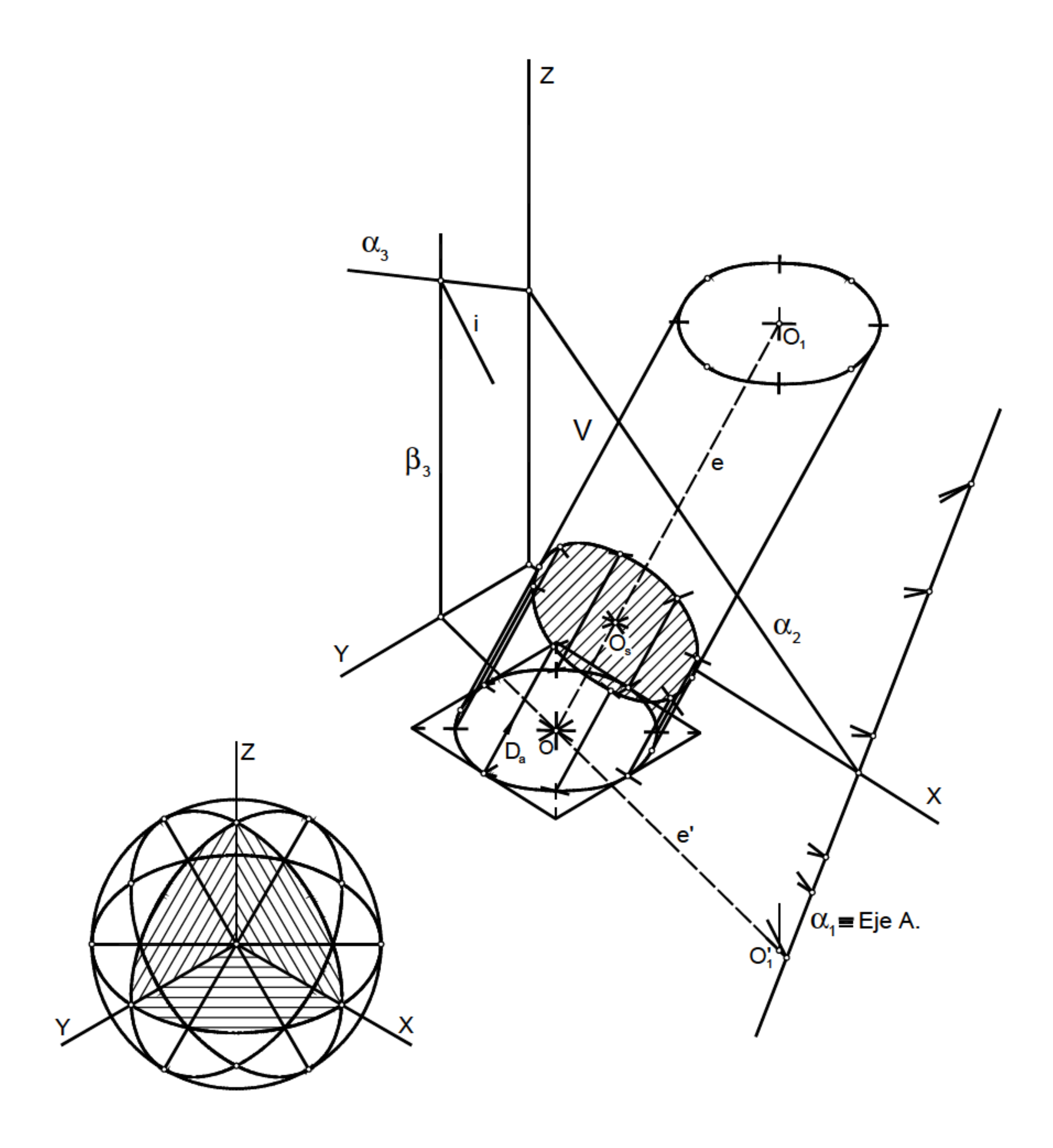


*.- Cilindro oblicuo. Sección plana.

La base y la sección que produce el plano α son figuras afines, los elementos de la afinidad son:

EJE = α_1

Da, paralela a las generatrices, p.p.a. = (O y O_s), siendo O_s el punto de intersección del eje -e- con el plano α.

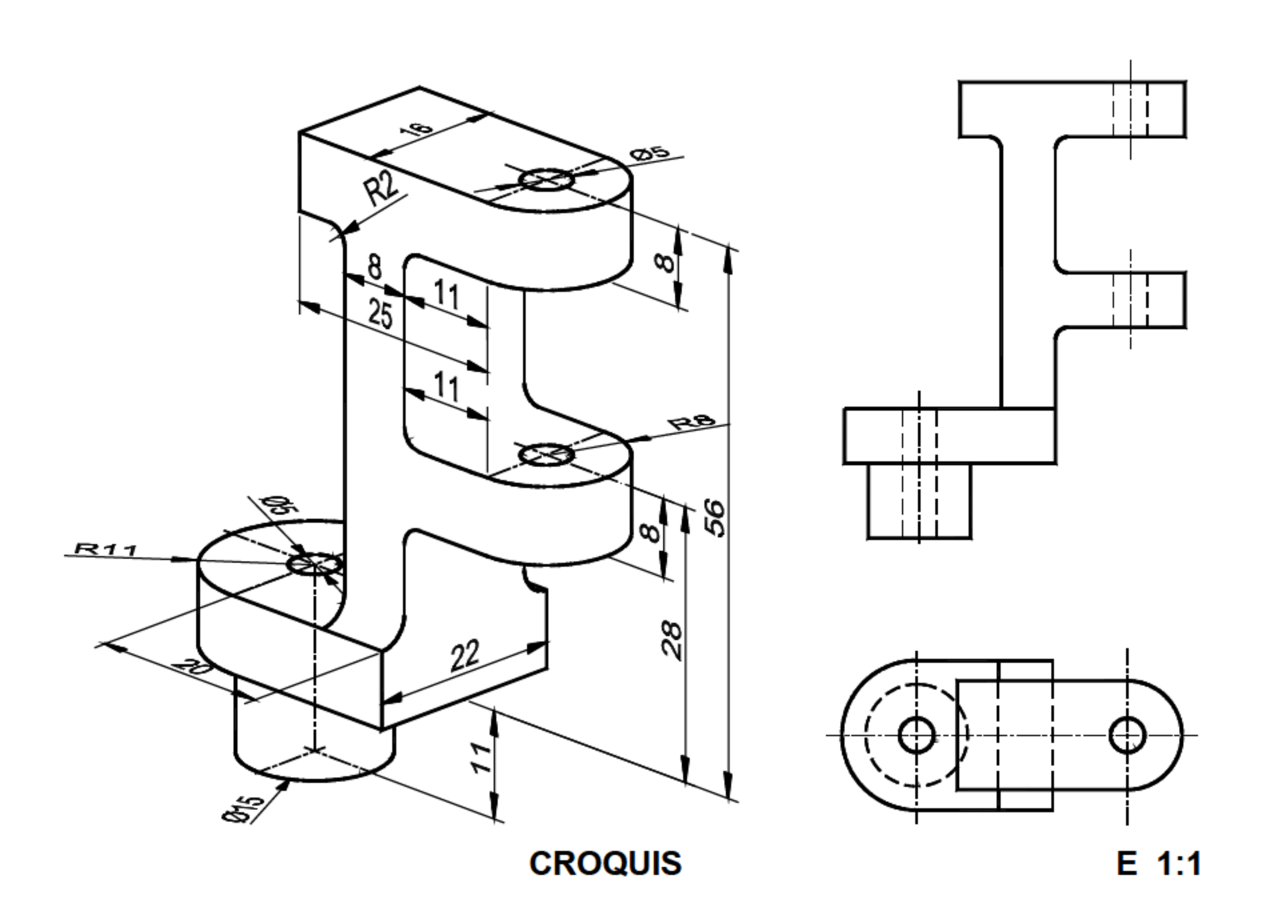


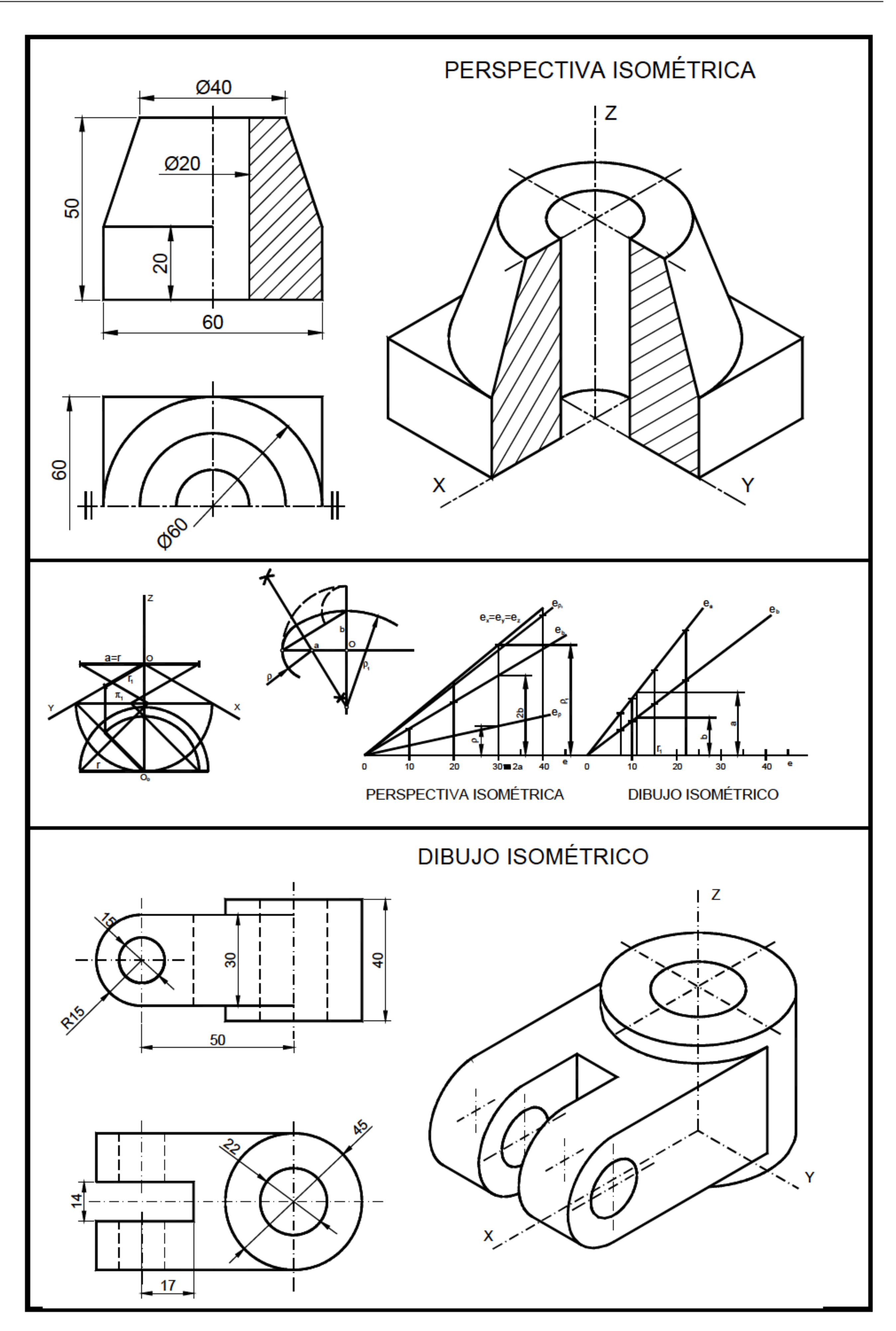
*.- Representación isométrica de la esfera y sección que le produce el triedro que determinan los planos de proyección.

La esfera se ha centrado en el origen de ejes.

22. APLICACIONES DEL SISTEMA AXONOMÉTRICO AL DIBUJO INDUSTRIAL

Aplicación directa de la perspectiva axonométrica en el Dibujo Industrial es el trazado de croquis y esquemas, representación de toda clase de detalles mecánicos o estructurales que en proyecciones diédricas queden poco claros. Se emplea también en ilustraciones técnicas, catálogos, dibujos para patentes, esquemas de distribución, esquemas para instalaciones eléctricas y de tuberías, etc. Muy útiles son también los despieces de un conjunto, pues permiten ver las piezas por separado en la posición relativa de montaje.



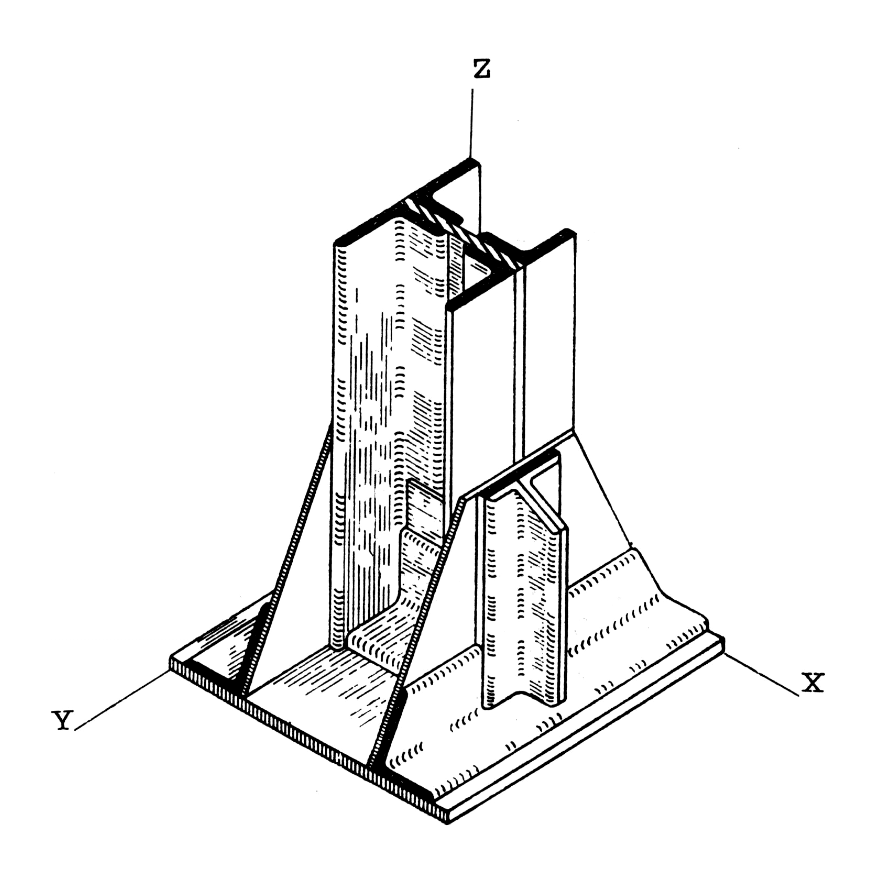

PERSPECTIVA ISOMÉTRICA
Ø40
Ø20
50
20
60
60
Ø60
Z
X
Y
PERSPECTIVA ISOMÉTRICA
DIBUJO ISOMÉTRICO
DIBUJO ISOMÉTRICO
15
R15
30
40
50
14
17
22
45
Z
X
Y

Todas las formas adoptadas en el Dibujo de Taller, referentes a planos de piezas, órganos de máquinas o máquinas completas, se aplican en el trazado de perspectivas axonométricas y, por lo tanto, en toda perspectiva de este tipo, que tenga por fin sustituir al plano en diédrico de una pieza, no puede faltar ningún dato, por lo que si es necesario deberá ir acompañado de leyendas que definan completamente la pieza representada.

Como norma general, habrá que colocar todas las cotas precisas, dando preferencia a las de construcción y montaje. Los criterios a seguir son idénticos a los dados para representaciones diédricas y la forma de efectuarlas queda reflejada en las figuras adjuntas.

Cuando la pieza presenta detalles interiores cuya representación con línea de trazos no es suficiente, hay que suponer la pieza seccionada por planos paralelos a los de proyección, rayando la parte maciza seccionada a 45 grados con relación al eje de la figura y con un interlineado proporcional al tamaño de la zona a rayar.

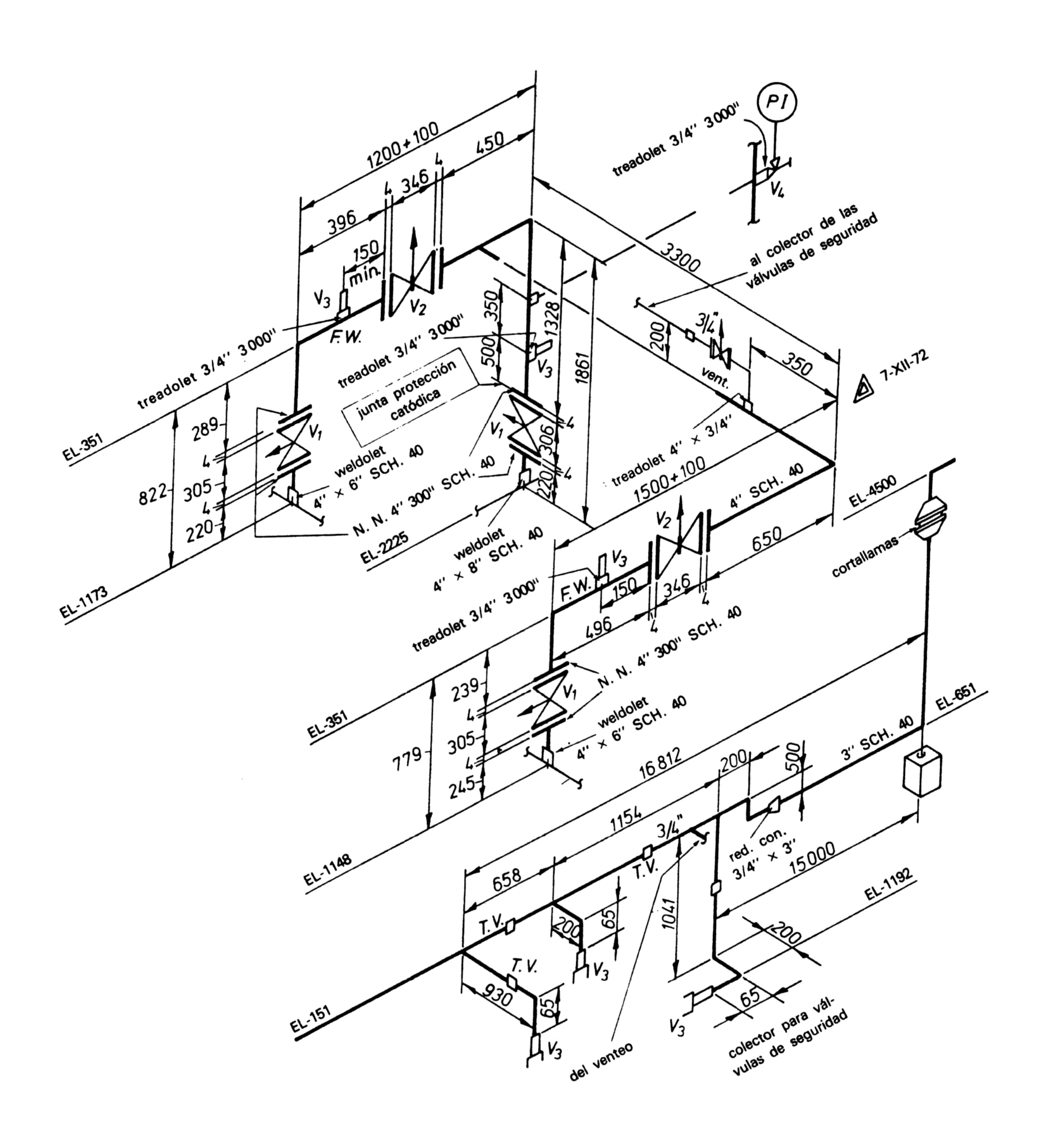
Son de gran interés los croquis a mano alzada de detalles constructivos, como los realizados sobre montajes de vigas armadas, ensamblajes industriales, utillajes, etc., así como detalles de decoración, sustituyendo con indudable ventaja a las representaciones diédricas, por su fácil comprensión y rapidez de ejecución, tanto en dibujo de gabinete o a pie de obra.



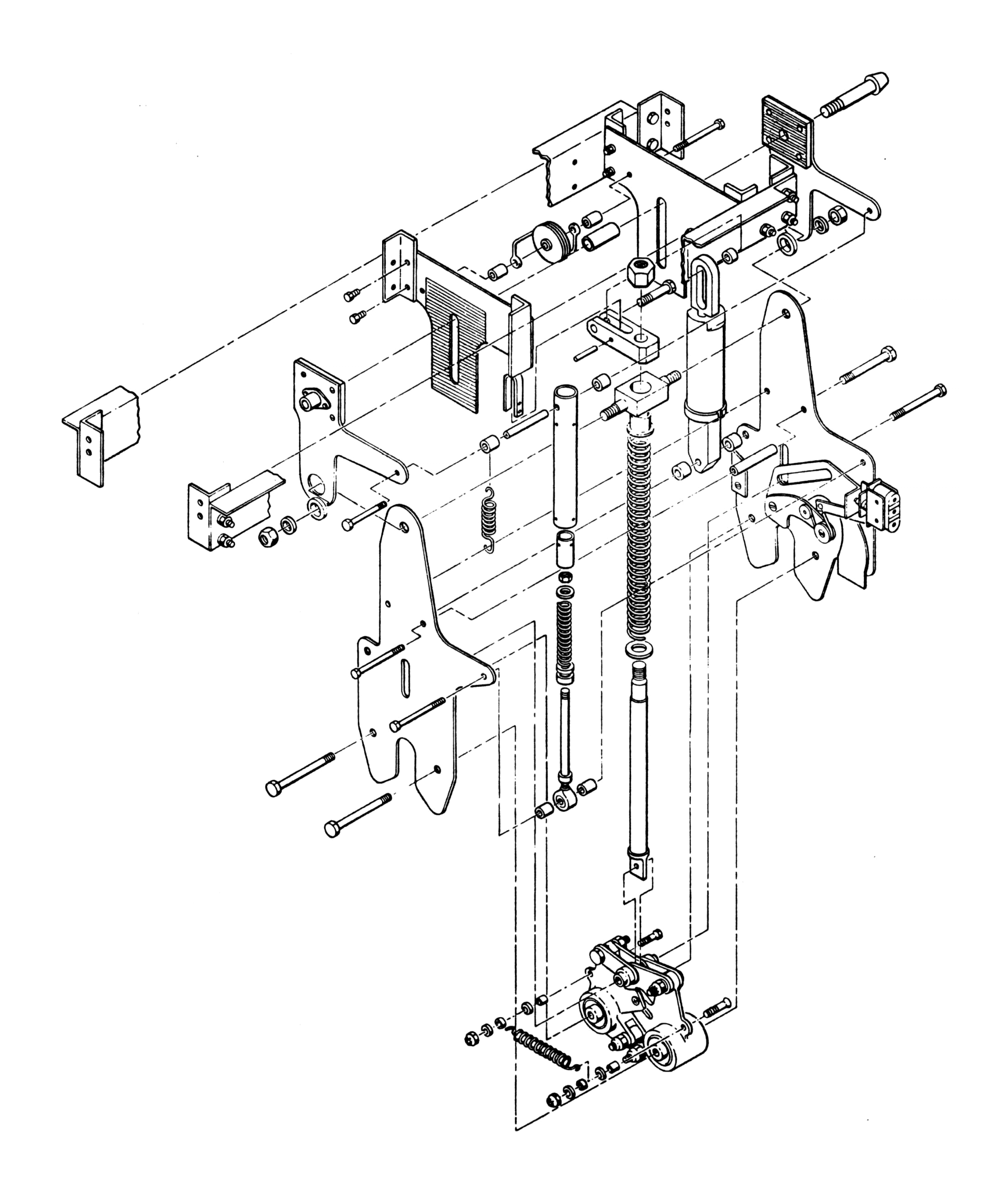
DIBUJO ISÓMETRICO PARA LA DEFINICIÓN DE NUDOS EN CONSTRUCCIONES METÁLICAS

Los esquemas de instalaciones, montajes de tuberías, etc., resultan muy útiles para el operario y en ellos pueden verse toda clase de detalles, como por ejemplo, número de elementos que componen la instalación, longitudes de tubos, etc. Si a estos esquemas se agregan otros datos como diámetros, tipo y paso de las válvulas, nomenclatura de los elementos que componen el conjunto, y todos los datos necesarios, tendremos un plano de la máxima utilidad.

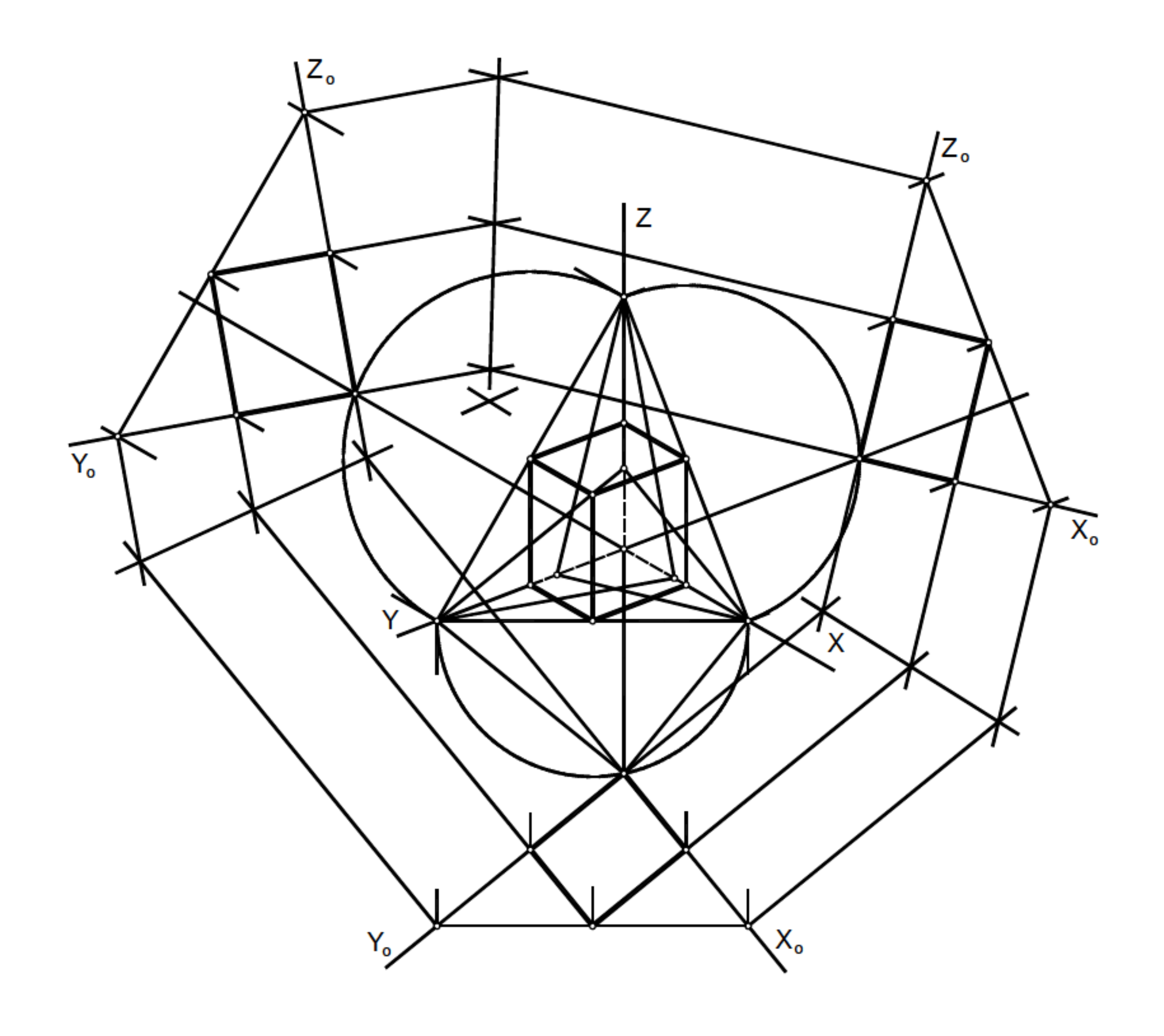
Estos esquemas suelen hacerse con colores normalizados (NORMA UNE 1063), siendo el número de colores empleados proporcional a la complejidad del esquema.



DIBUJO ISOMÉTRICO PARA LA INSTALACIÓN DE TUBERÍAS Y ACCESORIOS

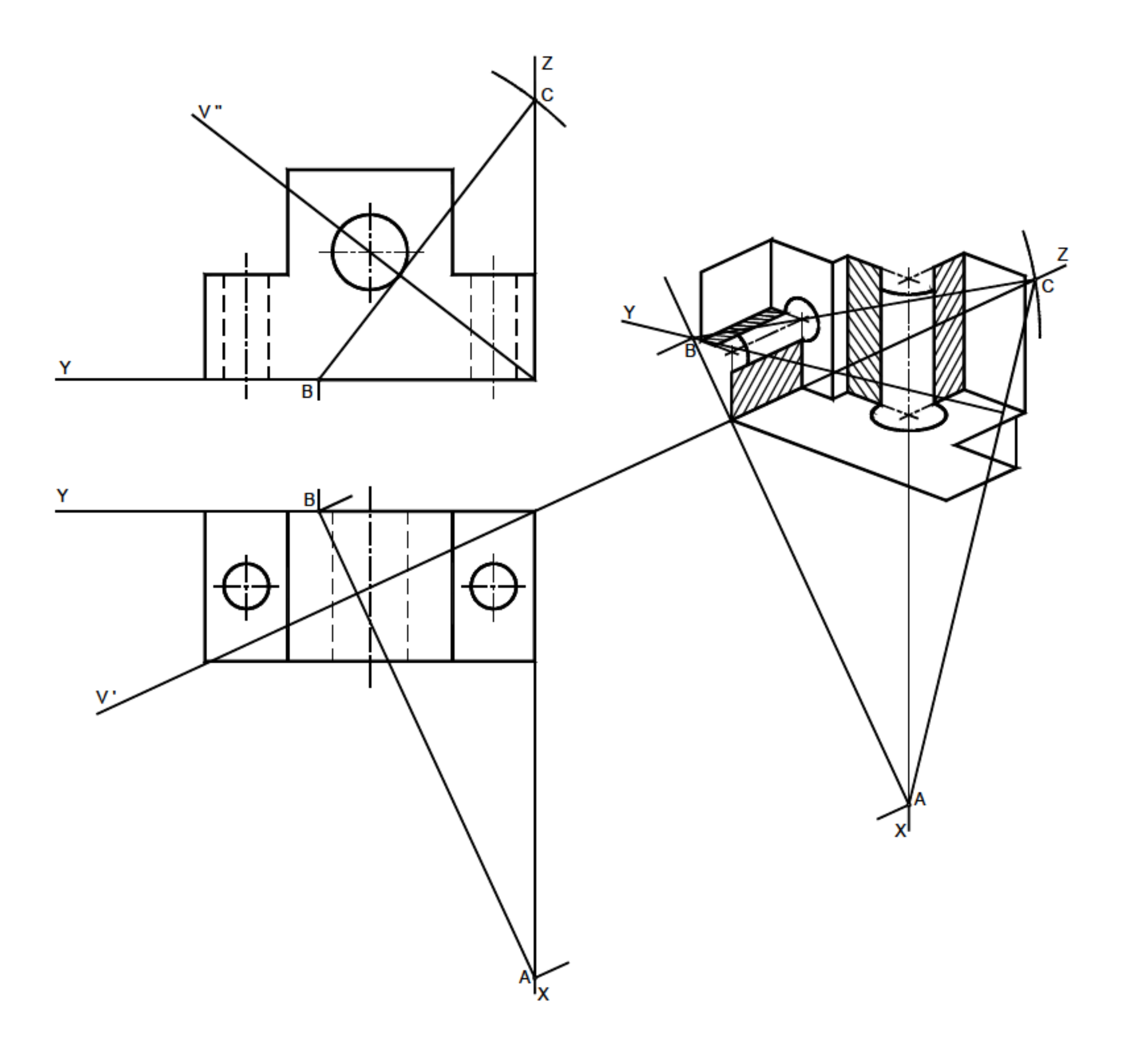


**DIBUJO ISOMÉTRICO ILUSTRATIVO DE MONTAJE
EN DESPIEZO ORDENADO**

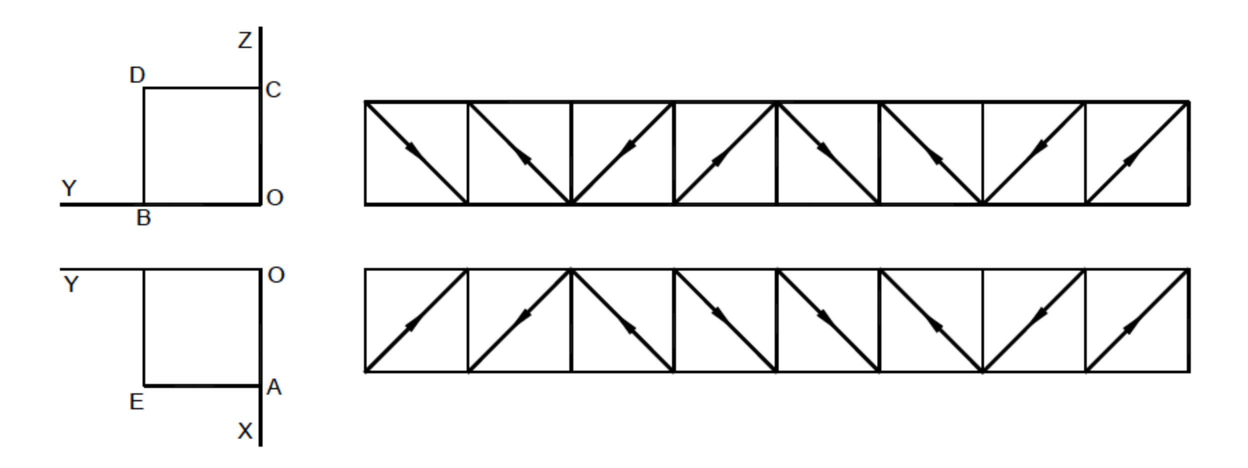


OBTENCIÓN DE LA PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA A PARTIR DE LAS VISTAS DIÉDRICAS DISPUESTAS EN POSICIÓN CORRELATIVA.

OBTENCIÓN DE LA PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA A PARTIR DE LAS VISTAS DIÉDRICAS, CORRELACIONA CON UNA DE ELLAS.-



ELECCIÓN DE LA VISUAL DEPENDIENDO DE LOS DETALLES A DESTACAR EN LA PERSPECTIVA.-



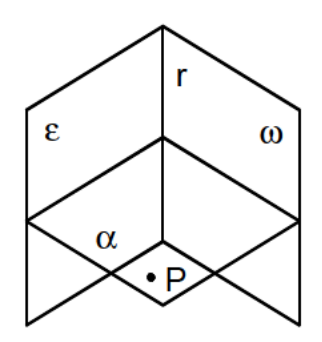
PROBLEMAS RESUELTOS

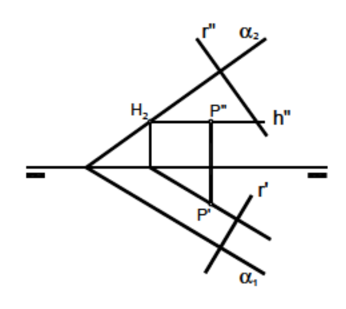
1. Dado el punto P hacer pasar un plano por él, de manera que, resulte ser perpendicular a dos planos oblicuos ε y ω conocidos.

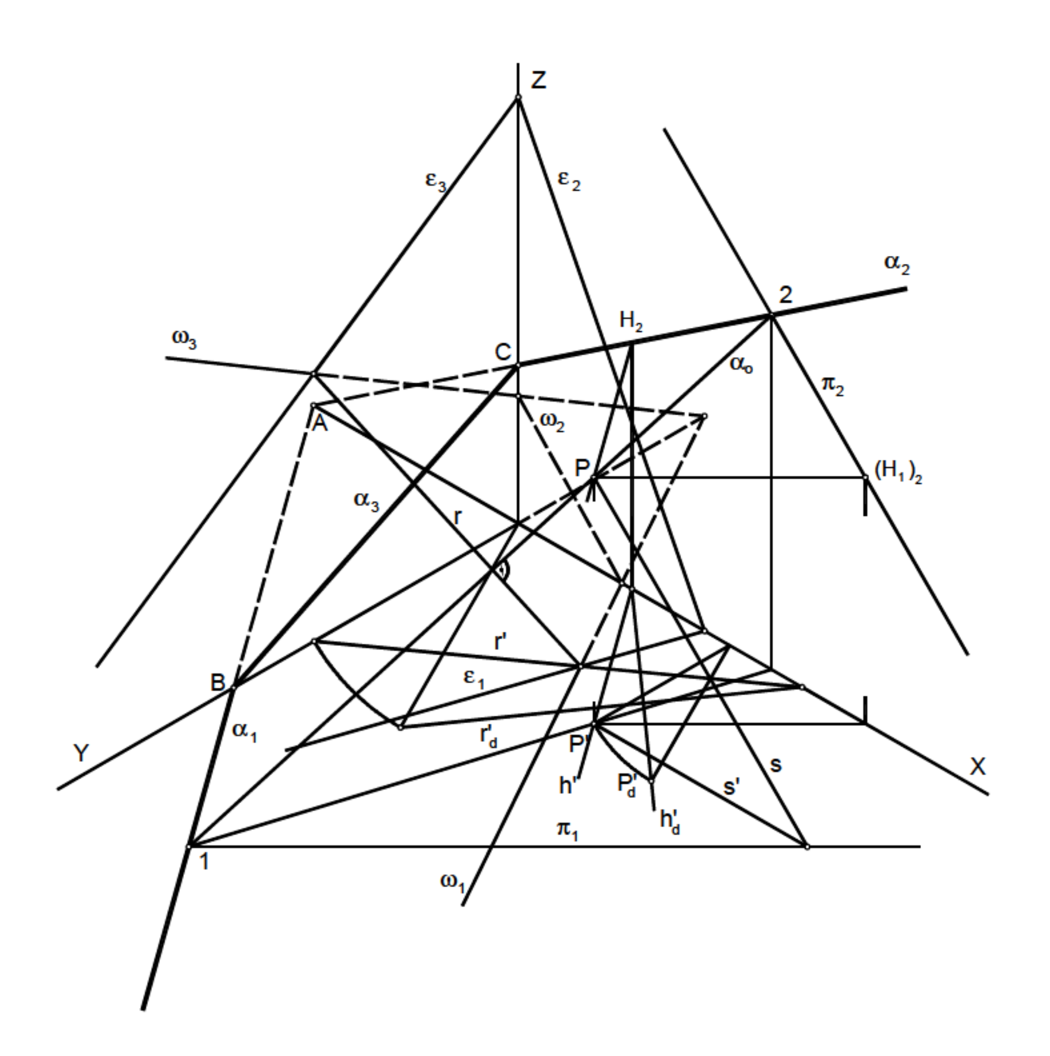
Se determina la intersección de los planos ε y ω obteniendo la recta r(r'). El problema queda reducido a trazar un plano que pase por el punto P dado y sea perpendicular a r. La traza natural α_o del plano solución pasará por P y será perpendicular a r. Por tratarse de un sistema isométrico, el resto de las trazas de α se pueden obtener así: Haremos pasar la horizontal h_1 por el punto, y por su traza $(H_1)_2$ una perpendicular al eje Y, obteniendo la traza π_2 del plano del cuadro, determinando al cortarse con α_o, el punto 2 de la traza α_2. Otro punto de la traza, el H_2, se obtiene como traza con el plano XOZ de una horizontal h que pase por P y que tiene su proyección h'_d perpendicular a r'_d, (resuelto en diédrico).

Queda así definida la traza α_2 que corta a los ejes Z y X en los puntos C y A respectivamente

La traza horizontal α_1, unirá el punto A y el 1, siendo este punto de encuentro de α_o con π_1. La traza α_3 unirá los puntos C y B.


r
ε
ω
α
P

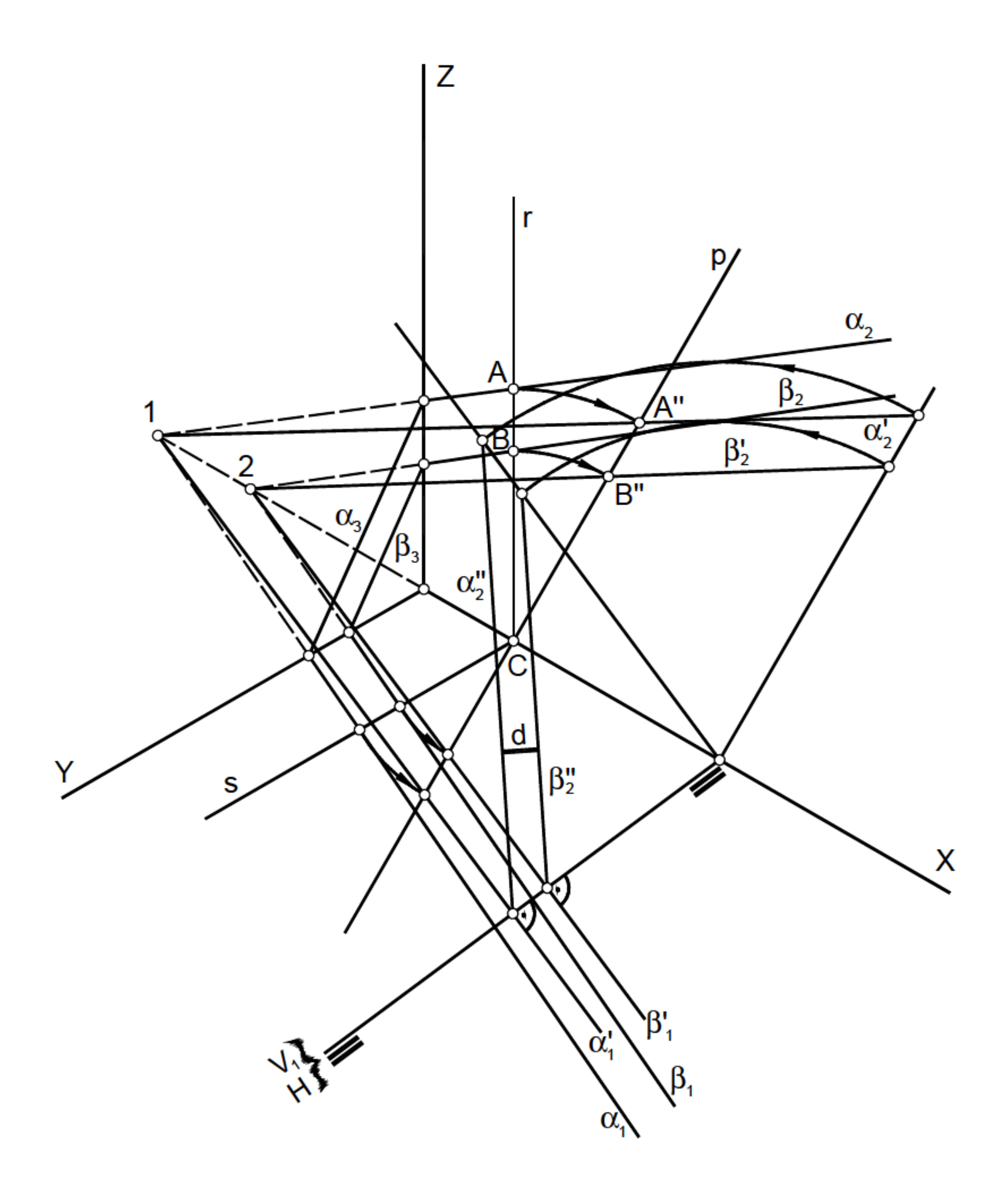

r"
α_2
H_2
P"
h"
r'
P'
α_1


Z
ε_3
ε_2
α_2
2
H_2
ω_3
C
α_o
π_2
A
ω_2
P
$(H_1)_2$
α_3
r
r'
ε_1
B
α_1
Y
r'_d
P'
h'
P'_d
s'
s
X
h'_d
π_1
1
ω_1

2. Hallar la distancia entre dos planos paralelos entre sí, y oblicuos con respecto a los planos de proyección.

Por tratarse de un sistema isométrico de ejes, podemos resolver el problema pasando los datos al sistema diédrico, utilizando el eje X como línea de tierra. Para ello por un punto cualquiera C del eje X trazamos las rectas r y s, paralelas respectivas a los ejes Z e Y, y una perpendicular al eje X, recta p.

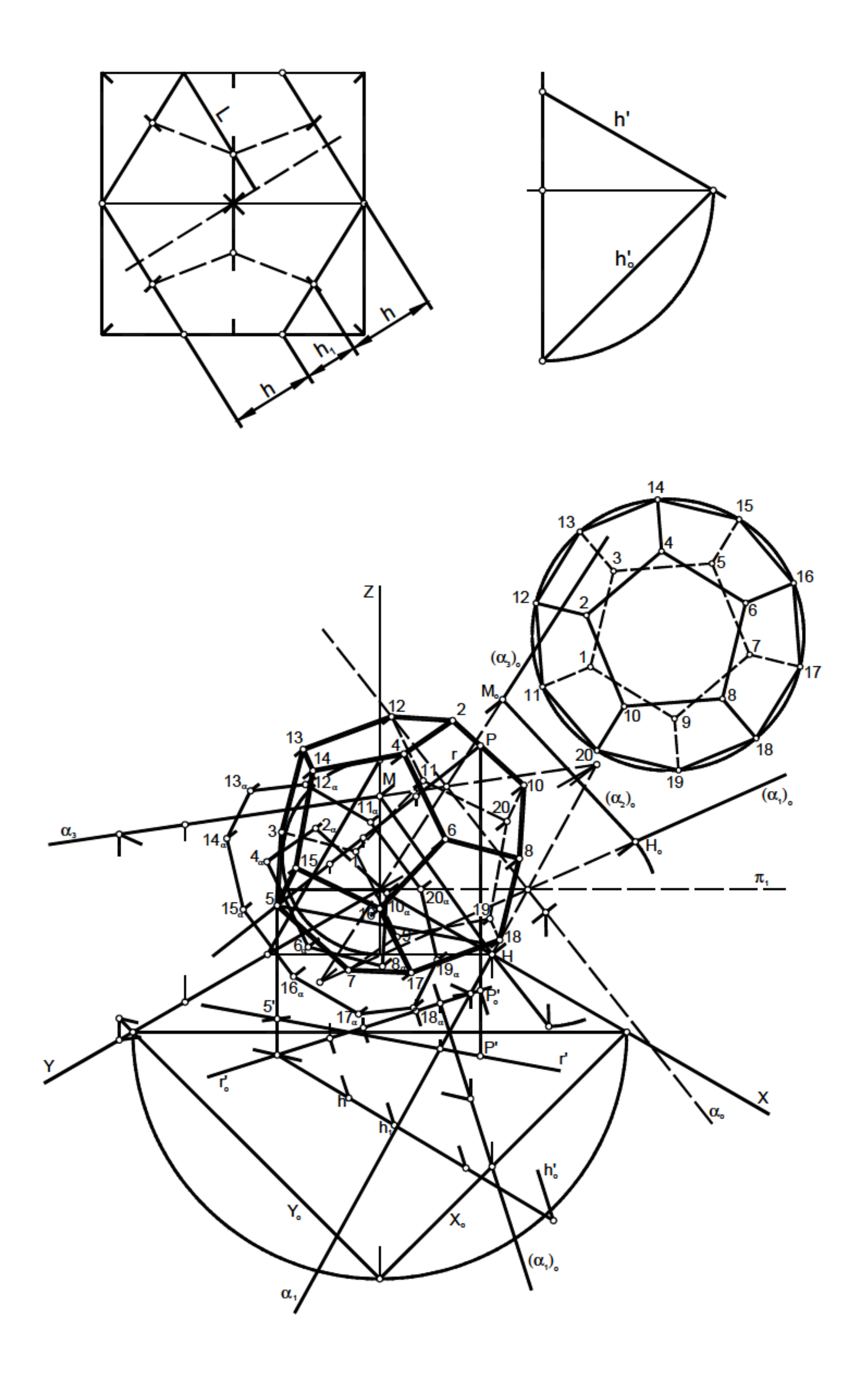
Las trazas α_2 y β_2, de los planos, cortan a r en los puntos A y B, que en diédrico serán A" y B". α_2 y β_2 cortan al eje X en los puntos 1 y 2, uniendo 1 con A" y 2 con B" se obtienen las trazas diédricas de los planos α'_2 y β'_2. Con las proyecciones horizontales se opera de igual forma obteniendo α'_1 y β'_1. Se realiza un cambio de plano, dejando los dos planos proyectantes; para ello se traza la nueva línea de tierra perpendicular a α'_1 y β'_1, las nuevas trazas verticales de los planos serán α''_2 y β''_2. La distancia entre ellas, d, será la distancia entre los planos.


Z
r
p
α2
A
A"
β2
1
B
α'2
β'2
2
B"
α3
β3
α"2
C
d
β"2
Y
s
X
β'1
α'1
V1
H
β1
α1

3. Dado un plano oblicuo. Obtener las proyecciones de un dodecaedro que tiene una cara apoyada en él.

En la figura superior se dibuja la sección principal del dodecaedro, en ella se encuentran los datos necesarios para poder representar el poliedro.

Abatimos el plano oblicuo y en dicho abatimiento dibujamos la proyección del dodecaedro sobre el plano. Desabatimos ésta proyección utilizando una afinidad cuyos elementos son: eje α_o; dirección de afinidad perpendicular a la traza α_o; par de puntos afines H y H_o. Cuando desabatimos obtenemos directamente los puntos de la cara apoyada en el plano, puntos: 1, 3, 5, 7 y 9. Por el resto de los puntos se trazan perpendiculares al plano α sobre las que llevamos las alturas correspondientes, convenientemente reducidas. Obtendremos así el resto de los puntos vértices del poliedro; puntos que uniremos ordenadamente, para así obtener su proyección directa.

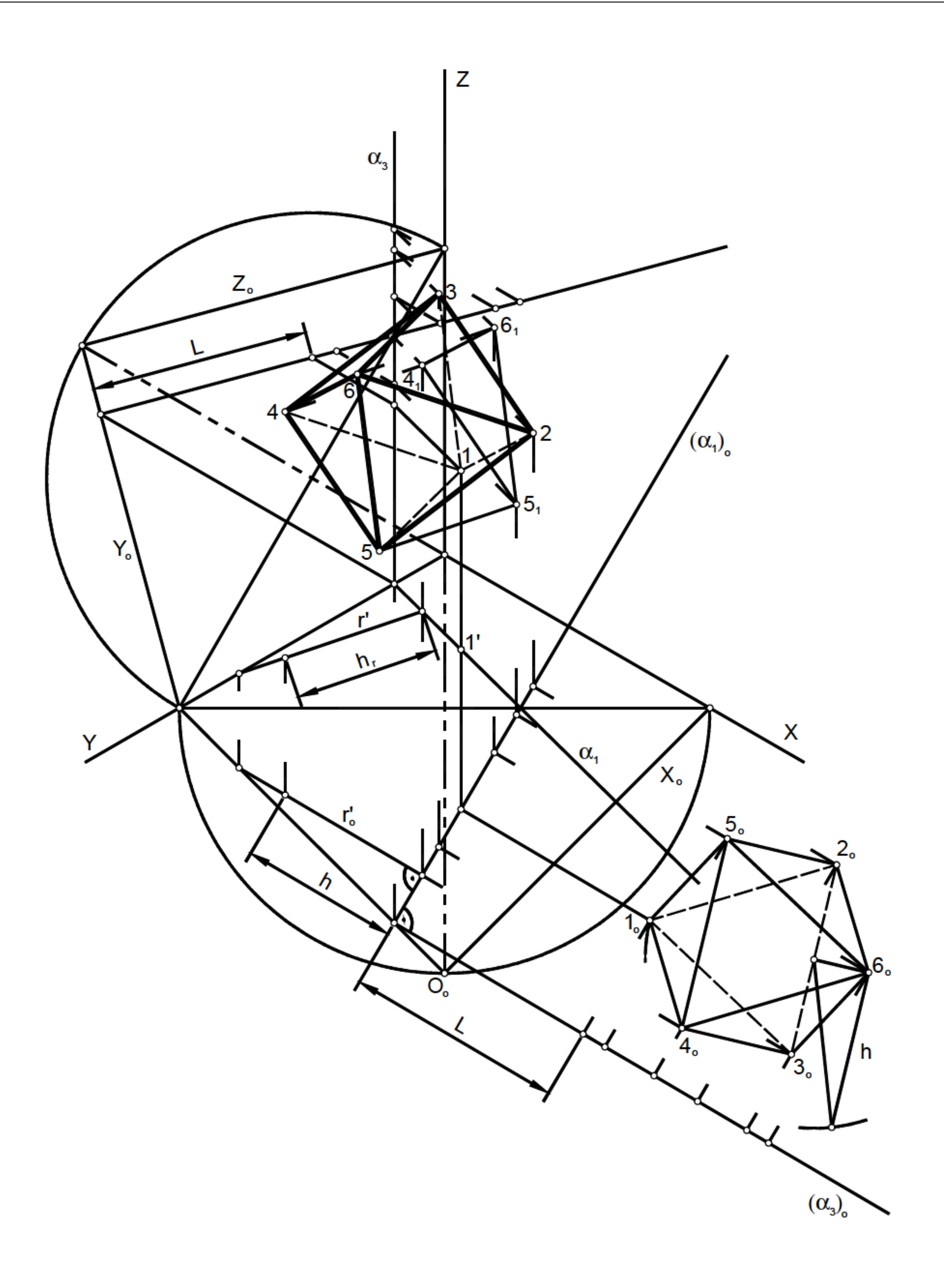

h
h₁
h'
h'o
Z
Y
X
P
M
H
r
r'
α₃
π₁
Mo
Ho
Yo
Xo
α₁
αo
(α₃)o
(α₂)o
(α₁)o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

4. Dibujar un octaedro que tiene una cara apoyada en un plano proyectante que es perpendicular al XOY.

Se abate el plano proyectante, mediante el abatimiento $(\alpha_1)_o$ de su traza α_1, resultando $(\alpha_3)_o$ perpendicular. En la zona abatida se dibuja la proyección del poliedro sobre el plano $1_o2_o3_o4_o5_o6_o$, los tres primeros correspondientes a la cara apoyada y los otros tres situados a la distancia -h- del plano. Estos puntos se refieren a la traza $(\alpha_1)_o$ y de aquí por afinidad, a α_1, obteniendo las posiciones sobre el plano al elevarlos desde la traza a la altura correspondiente L equivalente a la que existe entre el punto abatido y la traza abatida del plano. Así se obtienen los puntos 1, 2 y 3 que ya son del octaedro y los 4_1, 5_1 y 6_1 que corresponden a las proyecciones sobre el plano α, de los puntos 4, 5 y 6.

Determinamos la recta r perpendicular al plano, obteniendo primeramente su proyección r' perpendicular a la traza del plano α_1, operación que resolvemos en el abatimiento, según r'_o perpendicular a $(\alpha_1)_o$.

La recta r al ser horizontal es paralela a su proyección r', por lo que una vez obtenida, trazaremos paralelas a ella por los puntos 4_1, 5_1 y 6_1. Sobre las perpendiculares al plano trazadas, llevamos la distancia h_r, distancia a la que se encuentran del plano α, los puntos 4, 5 y 6. Los seis vértices obtenidos unidos ordenadamente definen la proyección directa del octaedro.


Z
α3
Zo
3
61
L
41
6
4
2
(α1)o
1
51
Yo
5
r'
1'
hr
Y
X
α1
Xo
r'o
5o
2o
h
1o
6o
Oo
L
4o
3o
h
(α3)o

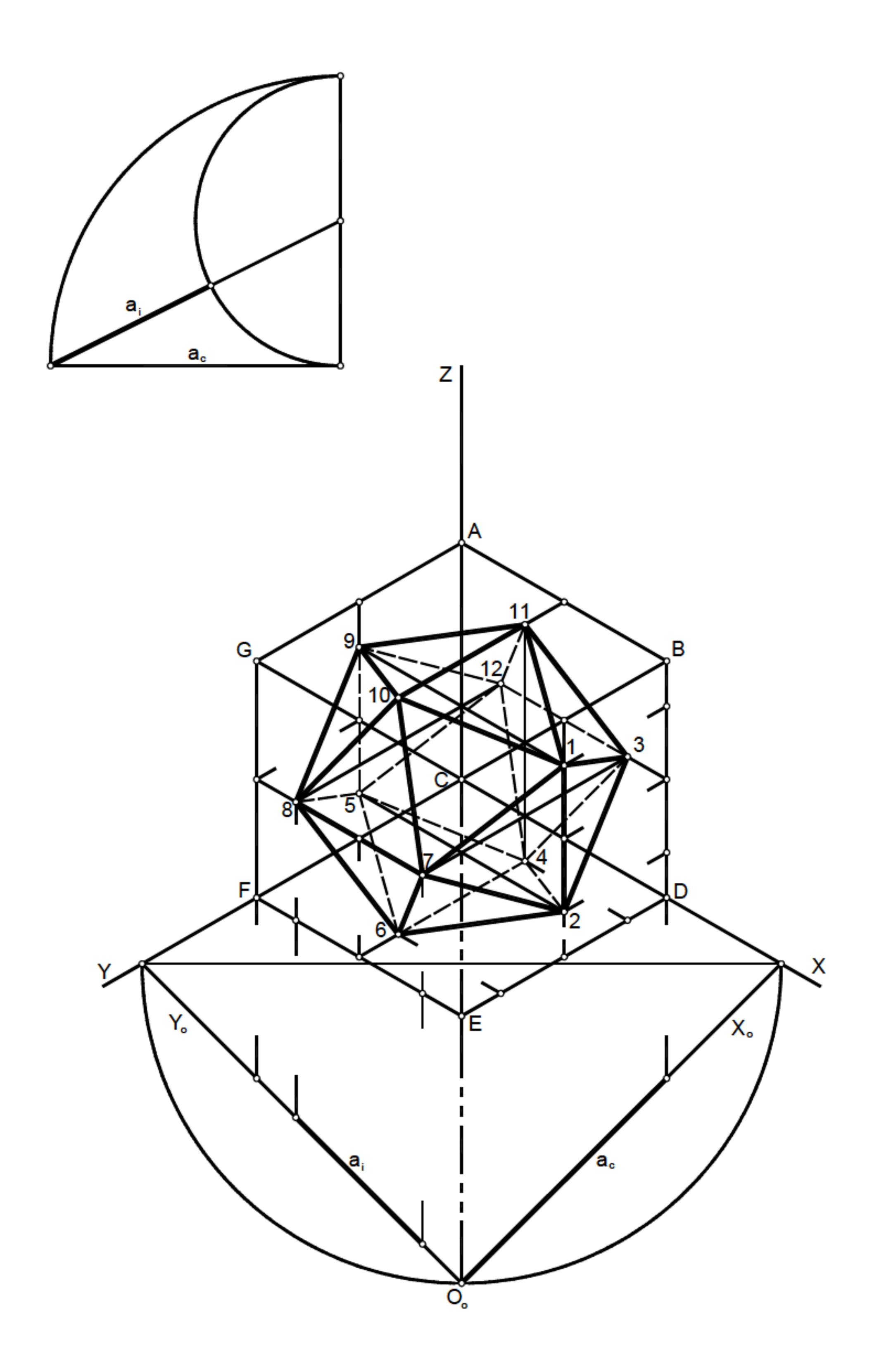
6. Conociendo la arista de un cubo. Se pide representar el icosaedro inscrito en él.

En la figura superior de la página siguiente se determina, partiendo de la arista del cubo, la arista que tendrá el icosaedro inscrito en él, teniendo en cuenta que dicha arista es el segmento áureo de la arista del cubo. En cada una de las caras del cubo se encuentra una arista del icosaedro, por lo tanto dos vértices de éste. Se traza el cubo de forma que tres de sus aristas coincidan con los ejes del sistema. En la cara. BCDE del cubo y centrada sobre su eje vertical, se sitúa la arista del icosaedro.

Esta operación se repite en cada cara, y teniendo en cuenta la geometría del poliedro, iremos situando sus aristas, centradas sobre los ejes de las caras del cubo que en cada caso corresponda.

Tendremos en cuenta las aristas ocultas del poliedro para una correcta interpretación perspectiva.

En la parte inferior, se determina gráficamente la reducción de dimensiones que al sistema corresponde.



a_i
a_c
Z
A
11
9
G
B
12
10
1
3
C
8
5
4
7
F
D
6
2
Y
X
E
Y_o
X_o
a_i
a_c
O_o

6. Determinar una pirámide pentagonal regular que tiene una cara lateral apoyada en el plano XOY. Hallar las sombras producidas por un foco puntual conocido F.

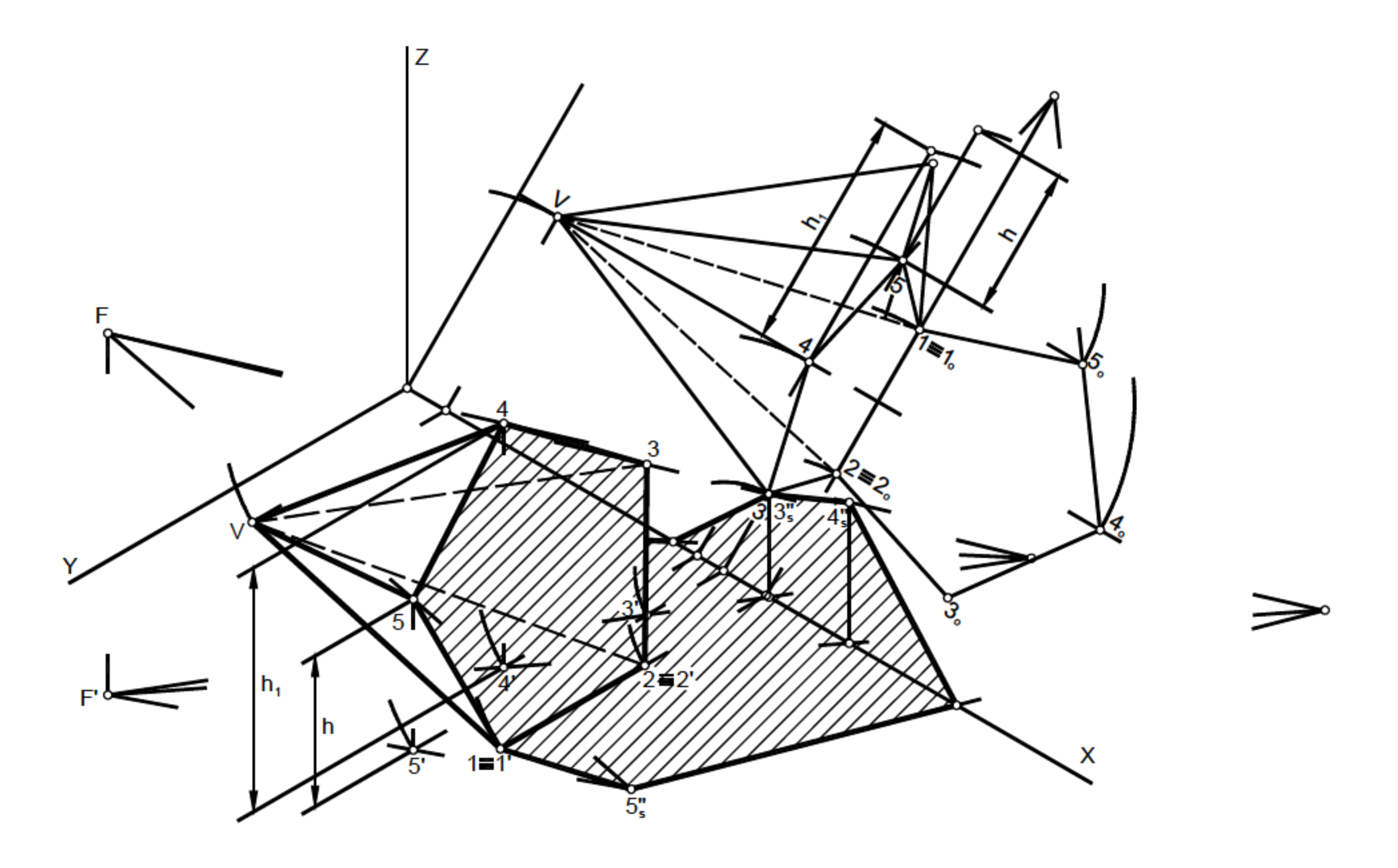
Utilizando el eje X como LT de un sistema diédrico, obtendremos la proyección de la pirámide, con una cara apoyada sobre el plano horizontal posterior tal y como se describe en los problemas (8-7) y (8-14)*. Una vez obtenida esta proyección determinamos la correspondiente horizontal axonométrica; definida por los puntos 1', 2', 3', 4', 6' y V'. Los puntos 1, 2 y V, se encuentran sobre el plano XOY; los puntos 3 y 5 a la distancia h de sus proyecciones, y el punto 4 a la distancia h_1 del 4'.

Para hallar la sombra arrojada, uniremos el foco F con los vértices no situados sobre XOY, obteniendo las rectas $\overline{F3}$, $\overline{F4}$ y F5; se determinan ahora los puntos de incidencia de estas rectas sobre los planos de proyección. Los puntos de sombra unidos convenientemente nos determinarán la sombra, sobre los planos XOY y XOZ.

La sombra propia, vista en la perspectiva, se corresponde integramente con la base de la superficie.

---

* del libro "Problemas resueltos de Geometría Descriptiva" tomo II, del mismo autor.

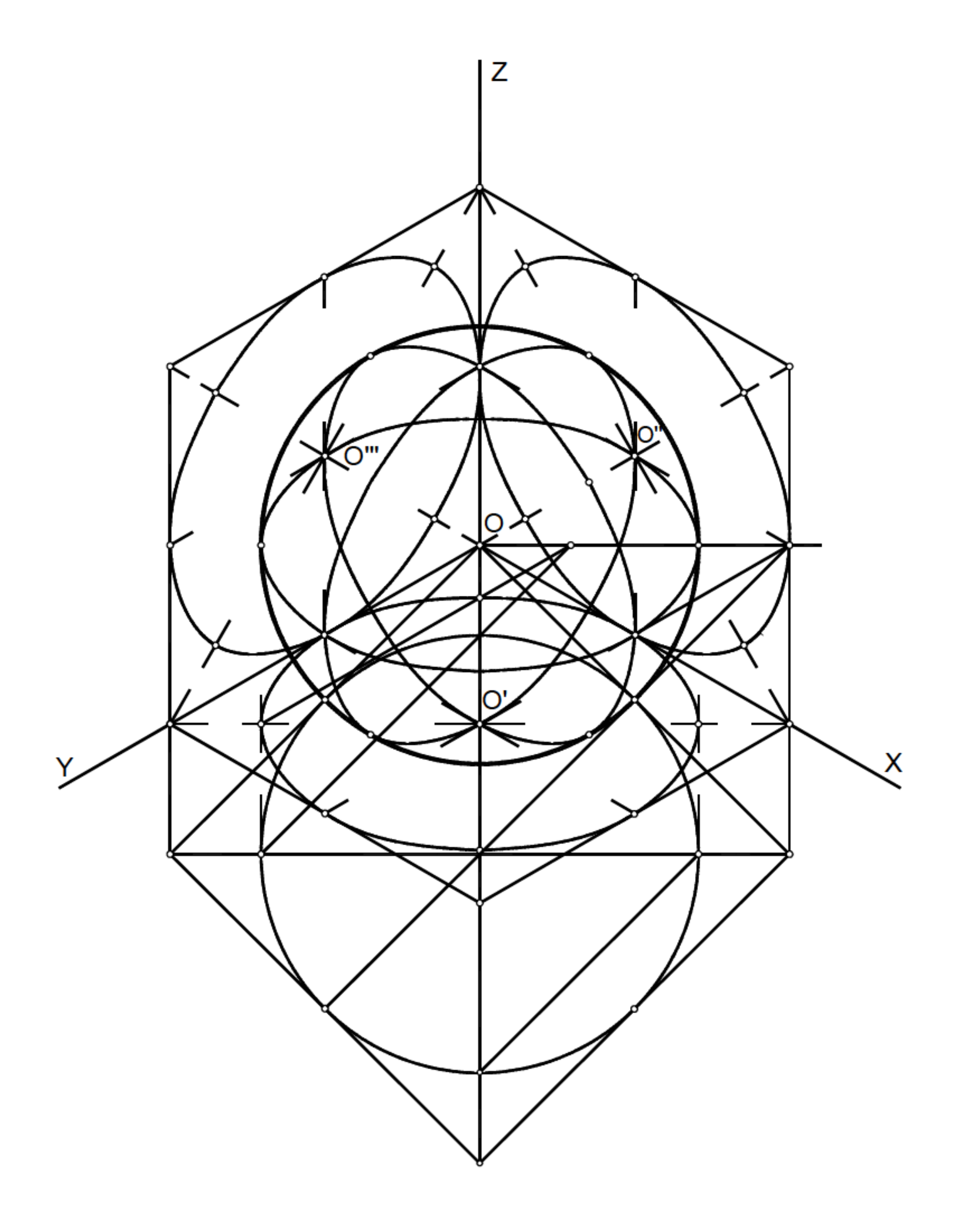


Z
V
h1
h
F
5
4
1≡1o
5o
4
3
2≡2o
V
3 3"s
4"s
4o
Y
5
3'
3o
F'
h1
h
4'
2≡2'
5'
1≡1'
X
5"s

7. Determinar la representación isométrica de una esfera de radio conocido.

Se hallan primero las tres proyecciones de la esfera sobre los planos del sistema, para ello dibujamos en el abatimiento de cada uno de dichos planos un cuadrado de lado el diámetro de la esfera, y en él inscribimos una circunferencia que se corresponde con la proyección de la esfera. Desabatiendo estas circunferencias obtendremos tres elipses, que en el caso de la figura son iguales por tratarse de un sistema isométrico.

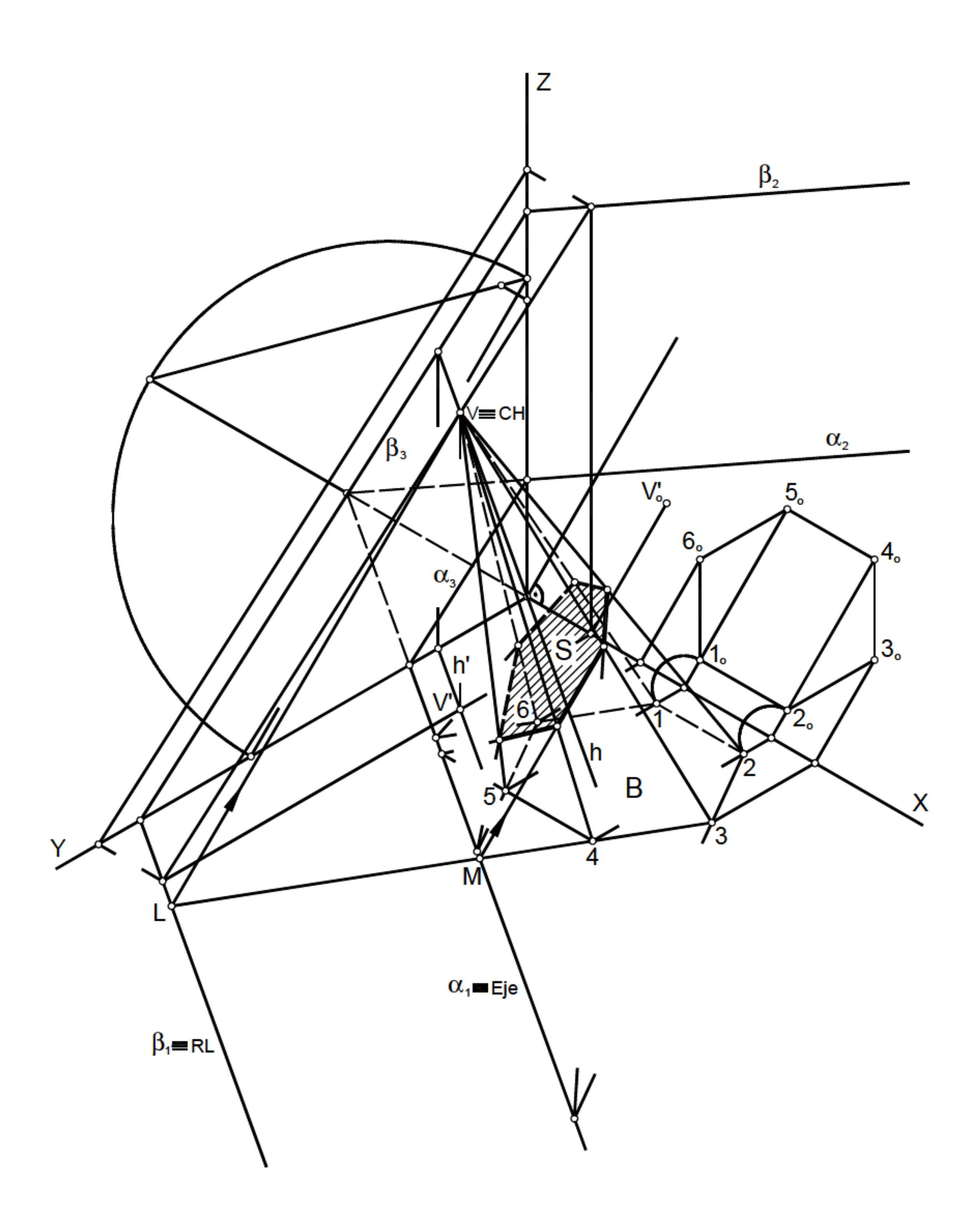
Estas elipses, trasladadas al centro O de la esfera, son las proyecciones directas de tres círculos máximos de la esfera, paralelos a los planos de proyección. La envolvente de ellas, será la proyección directa de dicha esfera. Si las tres elipses son iguales, la envolvente es una circunferencia. Podremos decir por lo tanto que la perspectiva isométrica de una esfera es una circunferencia de diámetro coincidente con la de aquella.


Z
O'''
O''
O
O'
Y
X

8. Obtener las proyecciones de una pirámide oblicua, cuya base que es un hexágono regular, descansa en el plano horizontal. Determinar la sección que le produce un plano oblicuo conocido.

Resolución del problema por homología.

Se obtiene la proyección de la pirámide por el método ya conocido y empleado en problemas anteriores. Una vez obtenida la pirámide, definiremos los elementos de la homología que permite transformar la figura B en la S: el eje se obtiene hallando la intersección del plano secante con el plano XOY que contiene a la base, dicha intersección se corresponde con la traza horizontal α_1. Para determinar la recta límite, se traza un plano auxiliar β que será paralelo a α y pasará por el vértice V de la pirámide, la traza β_1 será la recta límite. El centro de homología es el vértice V de la superficie. Una vez definidos los elementos, obtendremos una pareja de puntos homólogos uniendo, por ejemplo, los puntos 3 y 4 mediante una recta que corta a la recta límite en L y al eje M. Unimos L con el centro de homología, desde M, paralela a LV, paralela que corta a las aristas V4 y V3 en los puntos de intersección con el plano α. De igual forma podemos obtener el resto de los vértices de la sección que sobre la pirámide produce el plano.

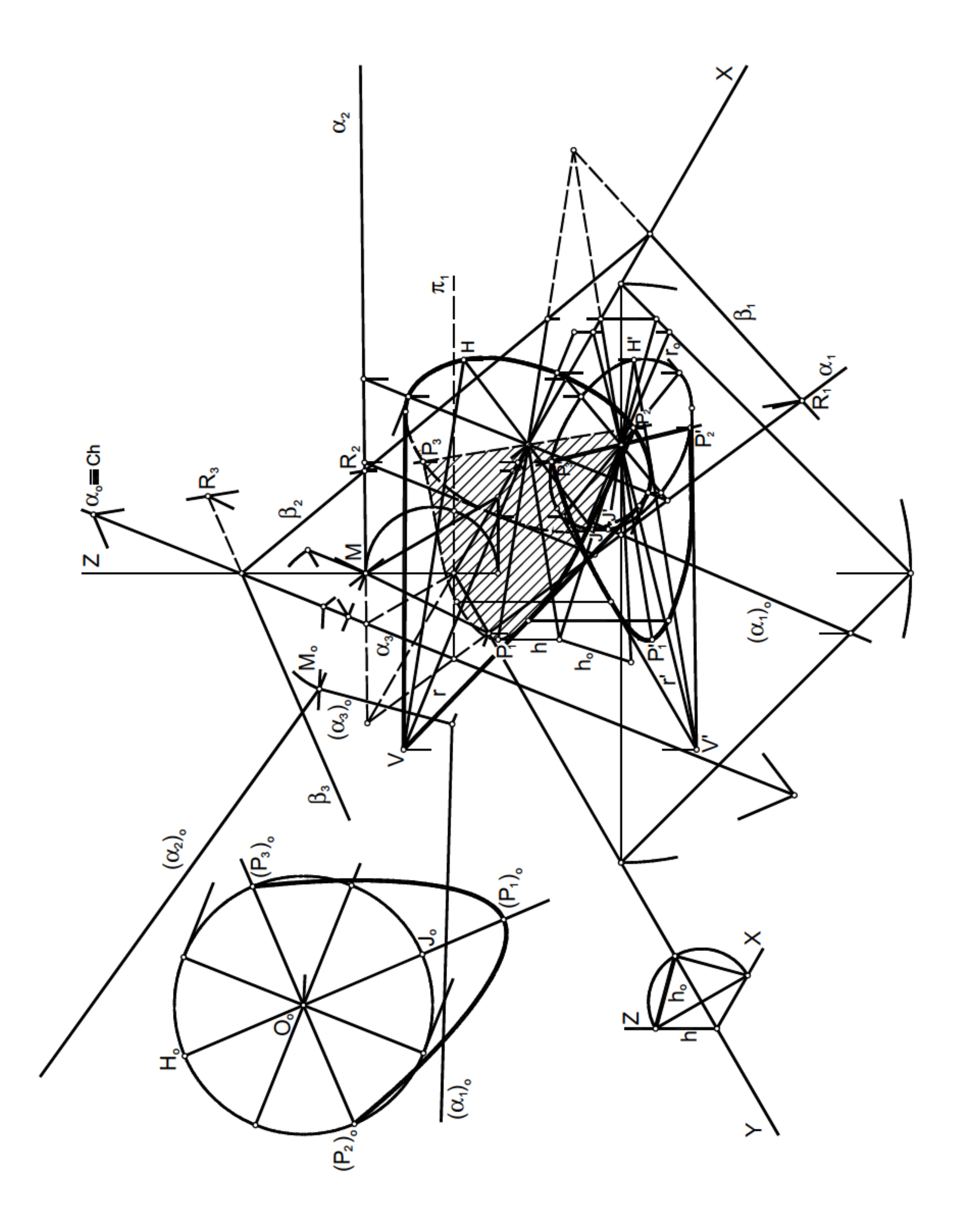

Z
β2
V≡CH
β3
α2
V'o
5o
6o
4o
α3
S
1o
3o
h'
V'
6
1
2o
h
2
B
5
X
Y
3
4
M
L
α1≡Eje
β1≡RL

9. Un cono de revolución tiene su base en un plano oblicuo conocido; provocar en él una sección que sea una parábola, de manera que la sección sea la máxima posible, determinar también la verdadera magnitud de la sección.

Abatiremos el plano sobre el que está la base del cono, por elevación de la misma obtenemos sus proyecciones directa y horizontal de centros O y O'; las proyecciones son elipses a las que trazaremos tangentes desde V y V' respectivamente, para determinar las generatrices aparentes de las proyecciones del cono. EL punto (V) está sobre una perpendicular a (α) por el punto (O) a una distancia correspondiente a la altura del cono.

Ya que la sección ha de ser parabólica máxima, el plano secante β ha de pasar por uno de los diámetros de la base ($\overline{P_2P_3}$), además de ser paralelo a una de las generatrices del cono, la VH.

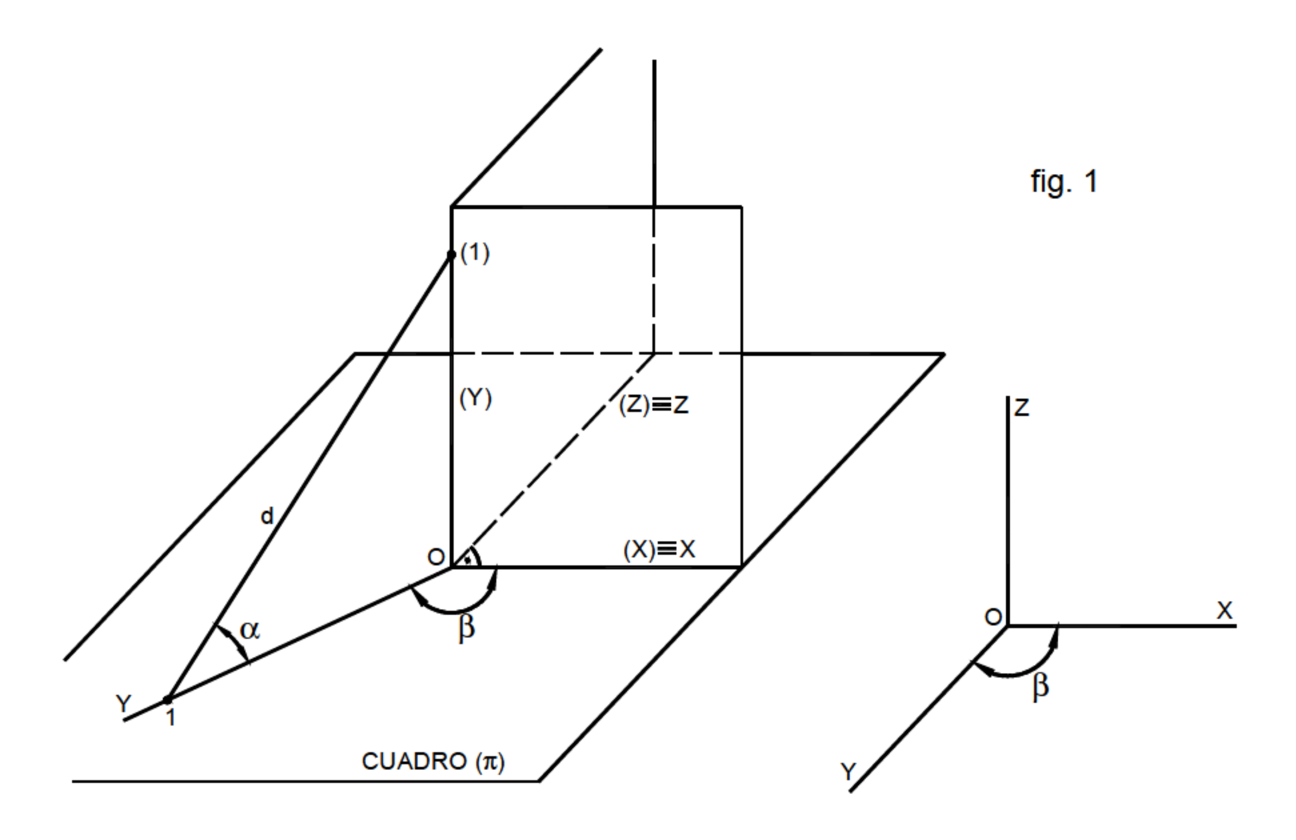
Haciendo pasar por O una paralela a $\overline{VH}$, en su intersección con el cono da el punto P_1, vértice de la parábola; para hallar más puntos de ella se obtiene la intersección de distintas generatrices con β. Para determinar la verdadera magnitud de la sección, sin abatir β, se procede según la parte izquierda de la figura: conocemos el eje de la parábola que pasa por O_o y $(P_1)_o$, siendo éste el vértice, y dos puntos de paso $(P_2)_o$ y $(P_3)_o$, datos que nos permiten hallar la curva.


X
Z
Y
α_2
π_1
β_1
α_1
R_1
β_2
R_2
R_3
$\alpha_o \equiv Ch$
M
M_o
α_3
$(\alpha_3)_o$
β_3
$(\alpha_1)_o$
$(\alpha_2)_o$
H
H'
P_3
P_1
P'_1
P_2
P'_2
V
V'
h
h_o
r
r'
r_o
J
$(P_3)_o$
$(P_1)_o$
$(P_2)_o$
J_o
O_o
H_o

Parte Segunda

SISTEMA DE PERSPECTIVA CABALLERA

1. GENERALIDADES Y FUNDAMENTOS



El sistema de perspectiva o proyección caballera es un caso particular de la Axonometría, en la que el plano del cuadro, en vez de ser uno cualquiera, es coincidente con uno de los planos del triedro trirrectángulo de proyecciones, el XOZ precisamente. En la (fig.1) tenemos el triedro 0(X)(Y)(Z). Suponemos que el plano de proyección o cuadro (π) coincide como se ha dicho con el XOZ del triedro, según esto (X) y (Z) coinciden con sus proyecciones, el eje (Y) es perpendicular a π y los planos XOY y ZOY son proyectantes sobre el cuadro. Si proyectamos un cuerpo sobre estos planos, tendríamos unas proyecciones llamadas previas y estas, proyectadas a su vez ortogonalmente sobre el cuadro, estarían confundidas siempre con los ejes X y Z. Para evitar esto, elegimos una dirección de proyección oblicua al cuadro y de esta forma el eje (Y) en lugar de confundirse con el origen O forma un ángulo α con el cuadro, teniendo que fijar además el ángulo β que forma con el plano (Y)(X) el plano proyectante de la citada dirección.

Visto esto, los ejes del sistema, quedan según se ve en la parte derecha de la figura.

En la (fig.2) tenemos que el punto (1) del eje (Y) se proyecta en 1 sobre el cuadro. El triángulo (1)O1 es rectángulo en O, si suponemos abatido este triángulo sobre el cuadro, tomando como charnela la recta OY, tenemos el triángulo 1_oO1 y por tanto vemos el ángulo α en verdadera magnitud.

Tomando ahora como charnela el eje X, abatimos el plano (Y)OX sobre el cuadro, el eje Y_o, vendrá ahora según la recta $O(1_1)_o$, verificándose por tanto que $(1)O=1_oO= O(1_1)_o$.

Hemos relacionado con estos dos abatimientos, el punto (1) del espacio con su proyección 1 sobre el cuadro y con su abatimiento $(1_1)_o$, existe una relación de afinidad, cuyo eje es el X, siendo $1(1_1)_o$ la dirección.

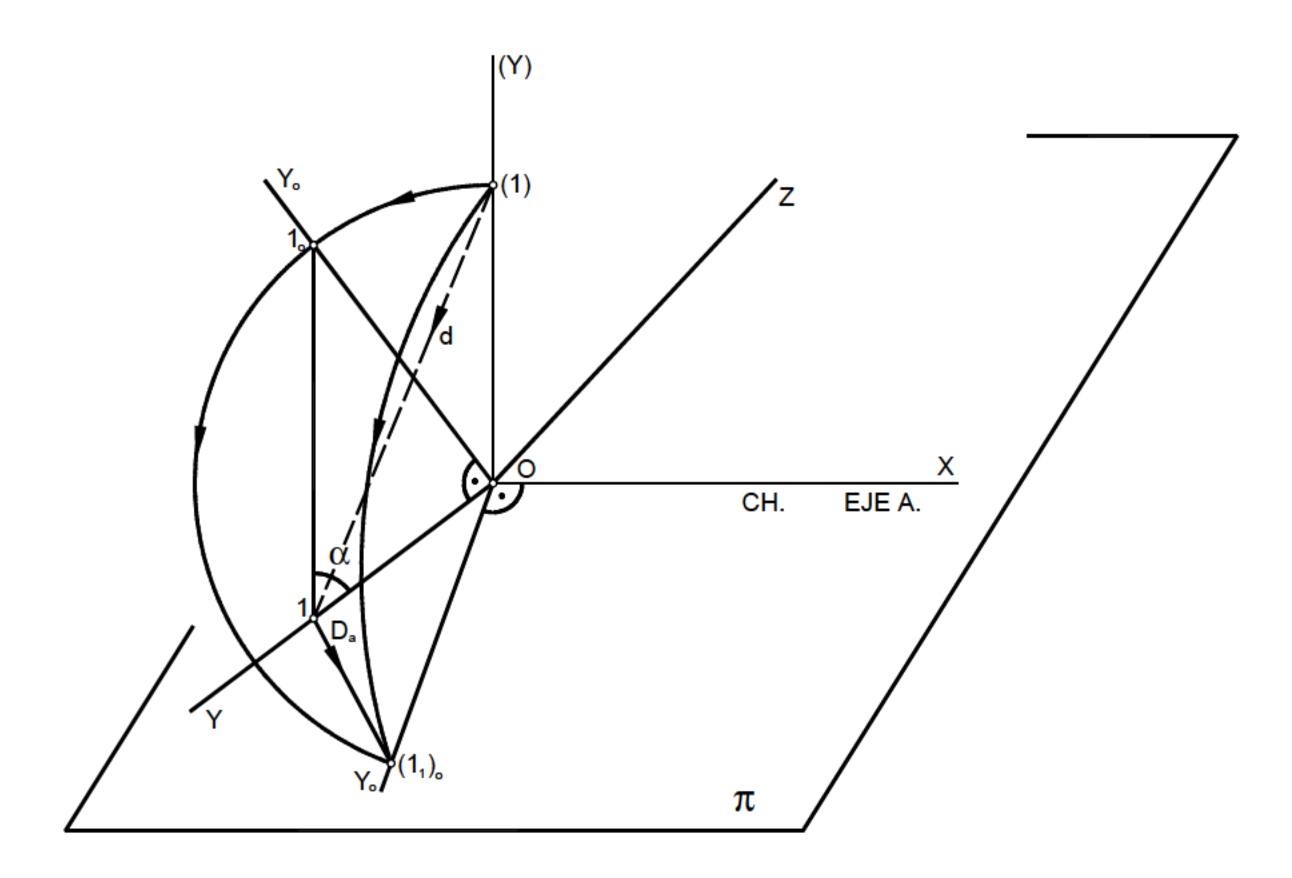


fig. 2

Volviendo de nuevo al triedro trirrectángulo OX(Y)Z representado en la (fig.3). Tomando un punto (B) del espacio para representarlo en perspectiva caballera.

La proyección ortogonal de (B) sobre el XO(Y) es el punto (E), sobre el ZOX al (A) y sobre el ZO(Y) el (C). Los puntos (A)(E)(C) se denominan proyecciones previas de (B) sobre las caras del triedro. Elegimos ahora una dirección de proyección oblicua al plano del cuadro, y proyectaremos sobre él, el conjunto formado por el punto (B) y sus proyecciones previas (A)(E)(C).

El punto (B) se proyecta en B, obteniendo la proyección directa oblicua o perspectiva caballera del punto. En A, C, E se encuentran las proyecciones de las proyecciones previas antes establecidas.

El paralelepípedo formado en el espacio sufre al proyectarse la deformación perspectiva correspondiente y en razón directa con el valor de los ángulos α y β previamente elegidos.

Resumiendo, diremos que este sistema emplea la proyección cilíndrica oblicua y un punto tiene cuatro proyecciones, una directa oblicua sobre el cuadro y tres proyecciones oblicuas de las ortogonales sobre el triedro.

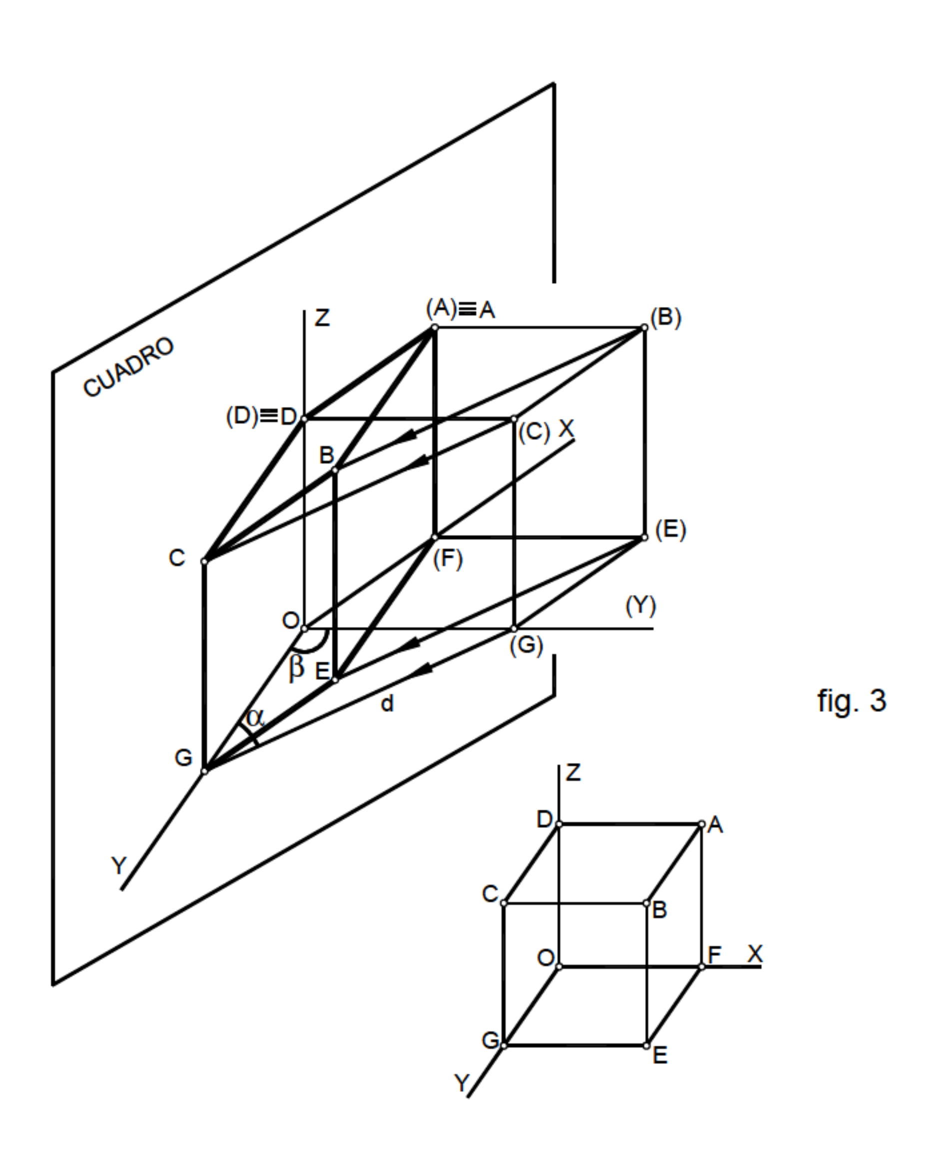


fig. 3

2. DATOS DEL SISTEMA. VALORES DE α y β

Para que un sistema de perspectiva caballera quede definido es preciso conocer los datos:

1º)- Valor del ángulo β que forma en el espacio el plano XOY con el plano proyectante del eje (Y) que contiene a la dirección de proyección; ángulo que en proyecciones formarán los ejes X e Y.

2º)- El ángulo α que forma la dirección de proyección con el plano del cuadro.

Con estos datos, el sistema estará perfectamente definido y podremos operar con él. El ángulo β podrá tener una serie de valores, eligiendo uno de acuerdo con el resultado que se desee obtener. En la (fig.4) se indican diez valores diferentes. Observamos el cubo representado en cada caso, pudiendo apreciarse las caras vista y ocultas y las deformaciones que en cada, situación se producen.

Dentro de cada uno de los valores de β podremos elegir varios valores para el ángulo α, según veremos al hablar de "Coeficientes de reducción".

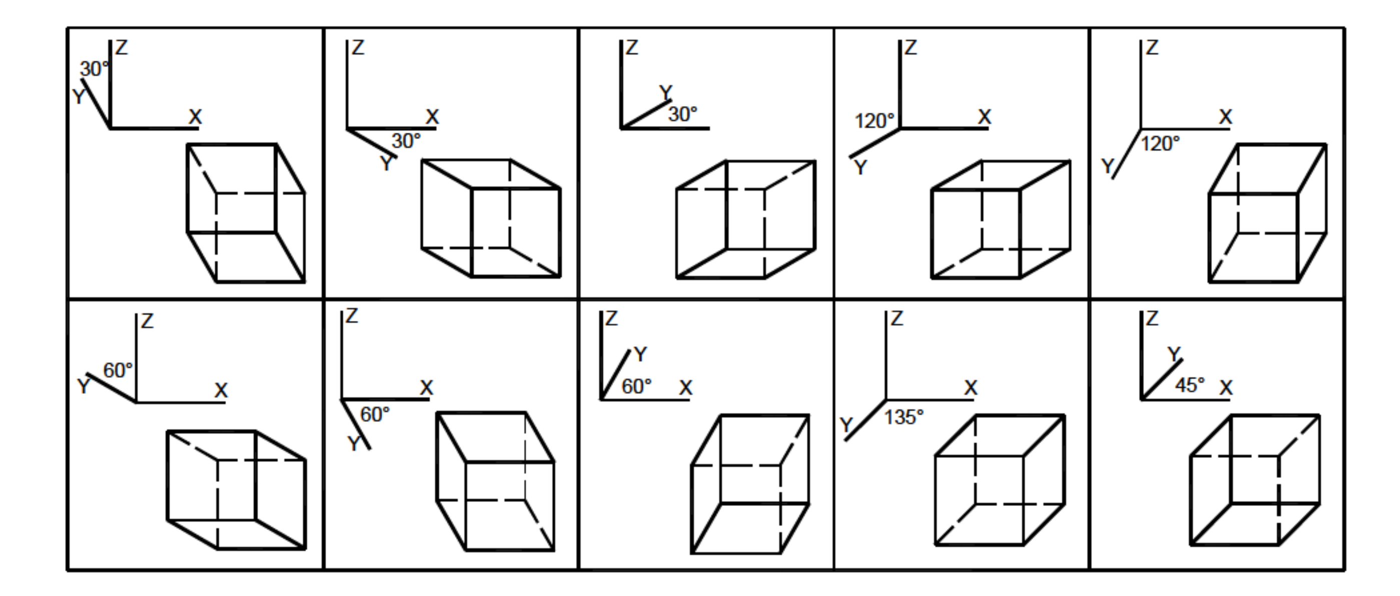


fig. 4

3. COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

En este sistema, y tal como hemos definido la forma de proyectar los elementos del espacio, es sencillo ver que las rectas paralelas al plano del cuadro, es decir al ZOX se proyectan tal y como son, en verdadera magnitud, lo mismo sucede si son paralelas a los ejes X ó Z.

Veamos que ocurre con las rectas paralelas al eje (Y), es decir las perpendiculares al cuadro. En la (fig.1) tomamos un segmento O-(1) del eje (Y) y proyectando sobre el cuadro obtenemos el segmento O1; O1 será mayor, igual o menor que el O-(1) del espacio según que el ángulo α sea menor, igual o mayor que 45 grados respectivamente.

Se llama coeficiente de reducción del sistema y se representa por la letra μ, el valor de la cotangente trigonométrica del ángulo α que forma la dirección -d- de proyección con el plano del cuadro, es decir: $\mu = \text{cotg}\alpha$. En el triángulo rectángulo (1)-O-1, el valor de la cotg de α es la razón entre el cateto contiguo y el cateto opuesto. De esto deducimos que el coeficiente de reducción es un número que indica el valor de la razón entre el segmento ya proyectado y el segmento real del espacio.

Pueden suceder los siguientes casos:

a) O-(1) = O-1 ,, $\alpha = 45°$,, $\mu = \text{cotg } 45° = 1$,, Sin deformación
b) O-(1) > O-1 ,, $\alpha > 45°$,, $\mu = \text{cotg } (>45°) < 1$,, Reducción
c) O-(1) < O-1 ,, $\alpha < 45°$,, $\mu = \text{cotg } (<45°) > 1$,, Ampliación

El valor más razonable es $\alpha = 60°$, siendo entonces $\mu = \text{cotg } 60° = \sqrt{3}/3$. No obstante, como valores más aconsejables para coeficiente de reducción deben emplearse (0,5 - 0,6 - 0,7) por obtenerse perspectivas de agradable aspecto, el efecto de deformación de la perspectiva aumenta con el coeficiente de reducción, denominando así con propiedad en el caso de ser α >45°, en los otros dos casos y en términos generales es más propio denominarle “coeficiente de aplicación“.

*.- Formas de dar el coeficiente de reducción.

El valor del ángulo se puede conocer por el número de grados, así α=60°, el coeficiente de reducción valdría μ=cotg 60°= $\sqrt{3}/3$ = 0,6.

Mejor que operar con el coeficiente aproximado, sería construir el ángulo α a partir de un punto -1- cualquiera del eje Y (fig.2) y tendríamos ya construido el triángulo 1_o-O-1.

También podemos conocer el coeficiente de reducción, por un número menor que la unidad, por ejemplo 0,5 - 0,6 – 0,7 - 2/3 - 3/4 - etc. Sea por ejemplo μ = 2/3, tomaremos dos unidades sobre el eje Y, y otras tres unidades sobre el eje Y_o, teniendo así los puntos 1 y 1_o respectivamente. La recta 1_o-1 formará el ángulo α con el eje Y. Por todo lo dicho, las escalas de este sistema son e_x = 1, e_y = μ y e_z = 1.

4. DEFINICIONES Y NOMENCLATURA

Perspectiva caballera de una figura es su proyección oblicua sobre un plano. Considerada como un caso particular de la proyección natural o directa. Esta perspectiva también se llama "libre" o "fantástica", por no ser la perspectiva del cuerpo, tal y como la ve el observador. Si β = 135°, Y es prolongación de la bisectriz de XOZ, la perspectiva se denomina "regular".

Los planos de proyección XOY, XOZ y ZOY se denominan: horizontal, primer vertical y segundo vertical, respectivamente, sobre ellos obtendremos las proyecciones de la perspectiva del objeto representado.

5. PERSPECTIVA DE ELEMENTOS FUNDAMENTALES: PUNTO, RECTA Y PLANO. PERTENENCIAS

Supongamos un punto (P) de coordenadas (x, y, z). En la (fig.5) aparece representado en el sistema definido por los ejes XYZ y el ángulo α que forma la dirección de proyección con el cuadro.

Las coordenadas x, z aparecen en verdadera magnitud, no así la y que aparece reducida según y_r, después de haberla situado en el triángulo reductor OL_oL, en el que se verifica que OL_o= Y, OL= y_r. Las proyecciones p', p", p"' se obtienen a partir de los puntos L, M, N por medio de paralelas a los ejes. La proyección directa P, se obtiene completando el paralelepípedo a partir de P'P"P"'.

La recta al igual que el punto queda definida, conociéndose dos cualesquiera de sus cuatro proyecciones. En la figura se representa una recta r(r', r", r"') pudiendo observarse la obtención de sus trazas R_1, R_2, R_3 por intersecciones sucesivas de r con r', r" y r"' respectivamente. El punto P está contenido en la recta r. por encontrarse las proyecciones del punto sobre sus homónimas de la recta; que es la condición de pertenencia entre estos dos elementos.

El plano como en los demás sistemas se representa por sus trazas; siendo estas sus intersecciones con los planos del triedro de proyección.

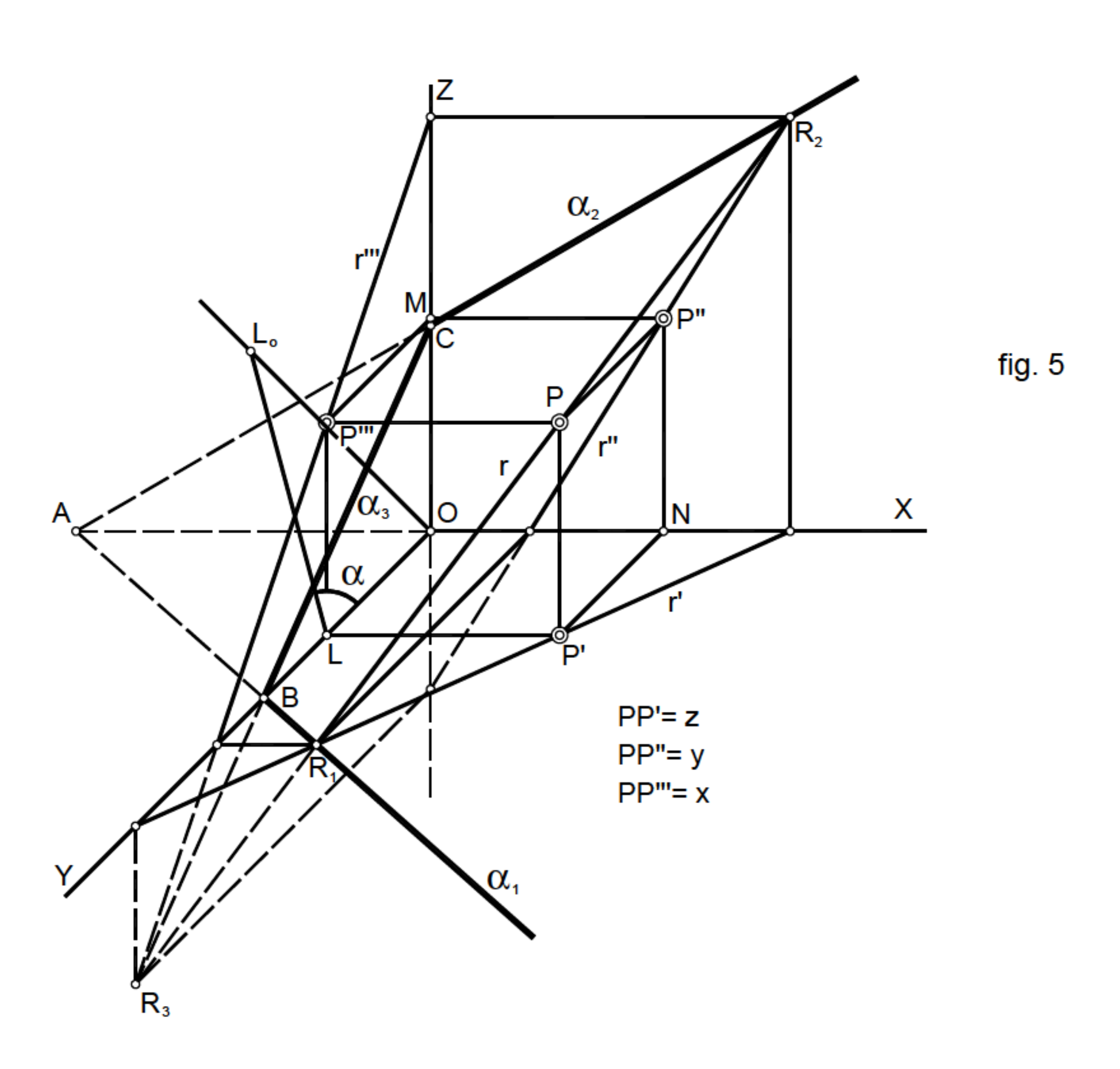


fig. 5

En la figura, el plano α está representado por sus trazas α_1, α_2, α_3 con los planos XOY, XOZ y ZOY respectivamente. Estas trazas se cortan dos a dos en los puntos A, B, C de los ejes, constituyendo el denominado triángulo de las trazas.

El plano α contiene a la recta r, por tener ésta sus trazas contenidas en las del plano, es decir. R_1 en α_1, R_2 en α_2 y R_3 en α_3, condición de pertenencia entre estos dos elementos.

El punto P estará situado en α por estarlo en una recta r de dicho plano. Con el mismo principio resolvemos el problema inverso.

Dada la similitud entre este sistema de perspectiva caballera y el axonométrico, anteriormente estudiado, nos pararemos en las cuestiones que representen alguna particularidad.

6. PASO DE SISTEMA DIÉDRICO A CABALLERA Y VICEVERSA

Supongamos un punto P(P',P") dado por sus proyecciones diédricas y referidas a un plano de perfil ZOY, de forma que sus coordenadas son : x = ON, y = NP', z = NP" (fig.6).

Para pasar el punto a caballera tomaremos las coordenadas x-z en verdadera magnitud sobre los ejes correspondientes, y la coordenada -y- se reduce sobre la recta Y_o abatimiento del eje Y; según el ángulo α elegido anteriormente.

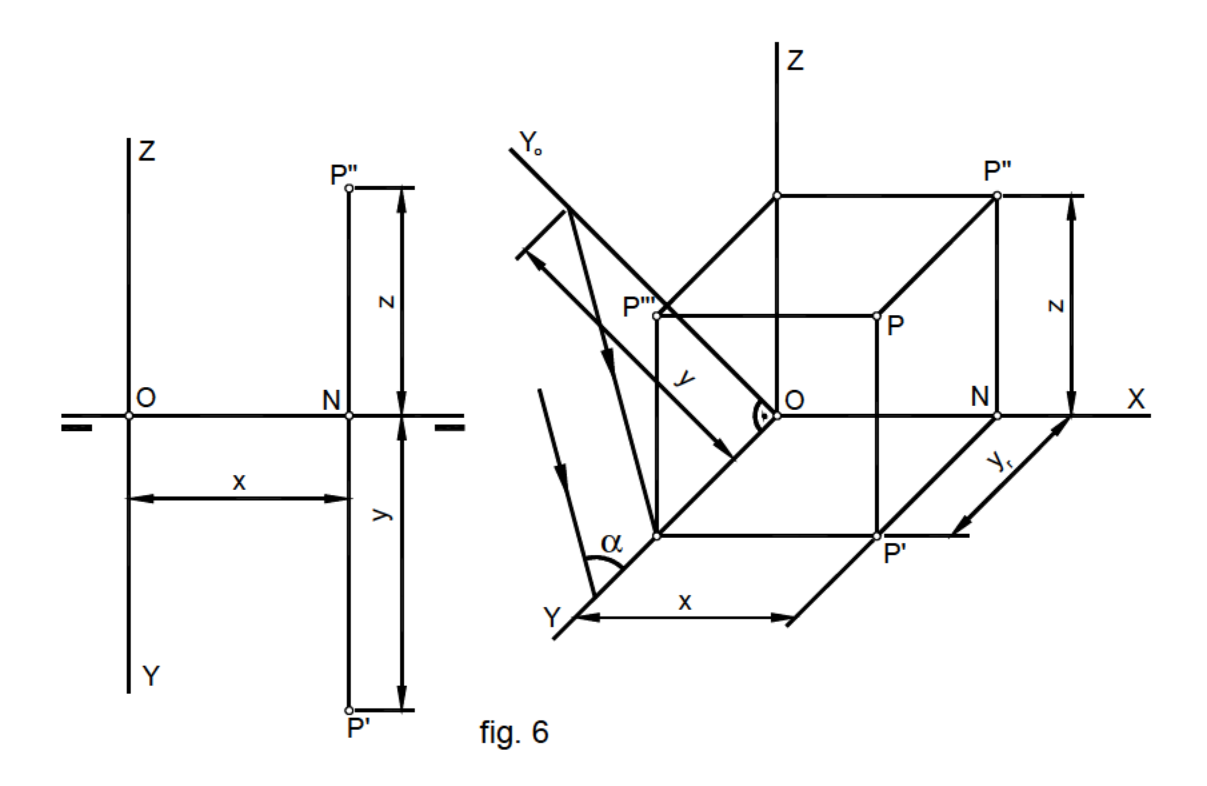


fig. 6

Dada la recta r(r'-r'') por sus proyecciones diédricas, realizamos la reconversión de las trazas, de la forma siguiente: V en R_2 y H en R_1, por lo que V'' lo hará según R_2'' y H' según R_2' y V' según R_2' y H'' según R_1'', así como V''' según R_2''' y H''' según R_1''' (fig.7).

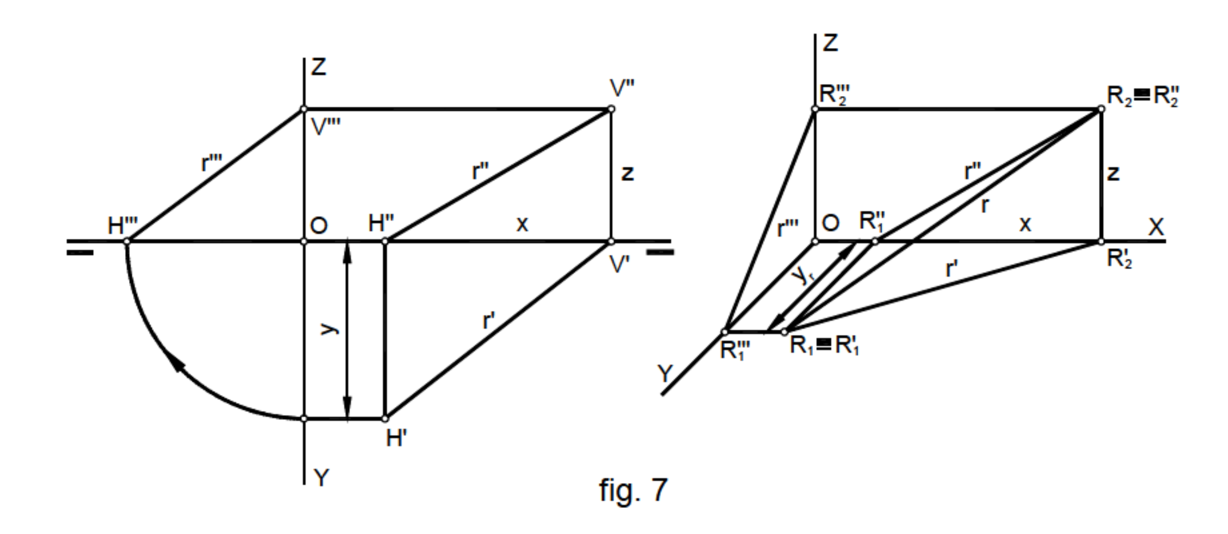


fig. 7

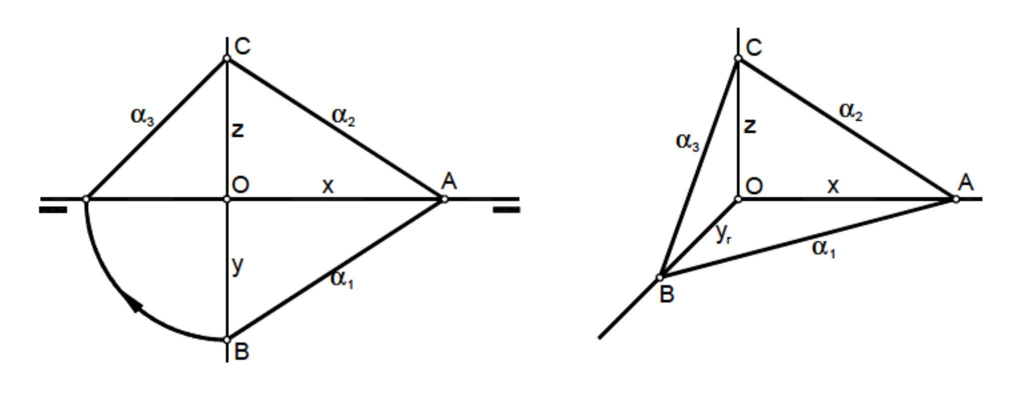


fig. 8

En la (fig.8), podremos ver el paso de un plano de un sistema a otro.

7. ABATIMIENTO DE LAS CARAS XOY Y ZOY SOBRE EL CUADRO

Para determinar las verdaderas magnitudes proyectadas o para obtener las proyecciones de verdaderas formas, recurrimos a los abatimientos de los planos XOY y ZOY sobre el cuadro, haciendo aplicación de las afinidades que se cumplen, como recurso de simplificación en los trazados.

El plano (X)O(Y) del espacio se abate sobre el cuadro, tomando el eje X como charnela o eje de giro del abatimiento; de esta forma el eje (Y) del espacio vendrá a situarse abatido en $(Y)_o$ sobre la prolongación del eje Z.

Si abatimos un punto (A) del eje (Y) considerándole en el plano proyectante de dicho eje, tenemos A_o; tomamos $OA_o = O(A)_o$ y unimos A con $(A)_o$, obteniendo la dirección de afinidad que liga la proyección sobre el plano XOY, con su abatimiento sobre el cuadro. Los puntos A' y $(A)_o$ son afines y el eje X es el eje de afinidad.

Si tomamos un segmento N'B' del plano XOY, para abatirlo sobre el cuadro, abatiremos sus extremos siguiendo las direcciones de proyección (dp), abatimiento (d_o) y afinidad (da), marcados en la (fig.9), obteniéndose N_o y B_o, extremos abatidos del segmento, y afines por tanto de los N' y B' respectivamente, sus prolongaciones tienen un punto de contacto en el eje de afinidad.

En la (fig.10) abatimos el plano (Z)O(Y) sobre el cuadro, tomando el eje Z como charnela. El segmento proyección N'''B''' tiene su abatimiento en N_oB_o, teniendo ambos segmentos proyectado y abatido un punto de contacto en el eje Z de afinidad.

Evitamos toda repetición porque de hecho el trazado es similar al de la figura anterior.

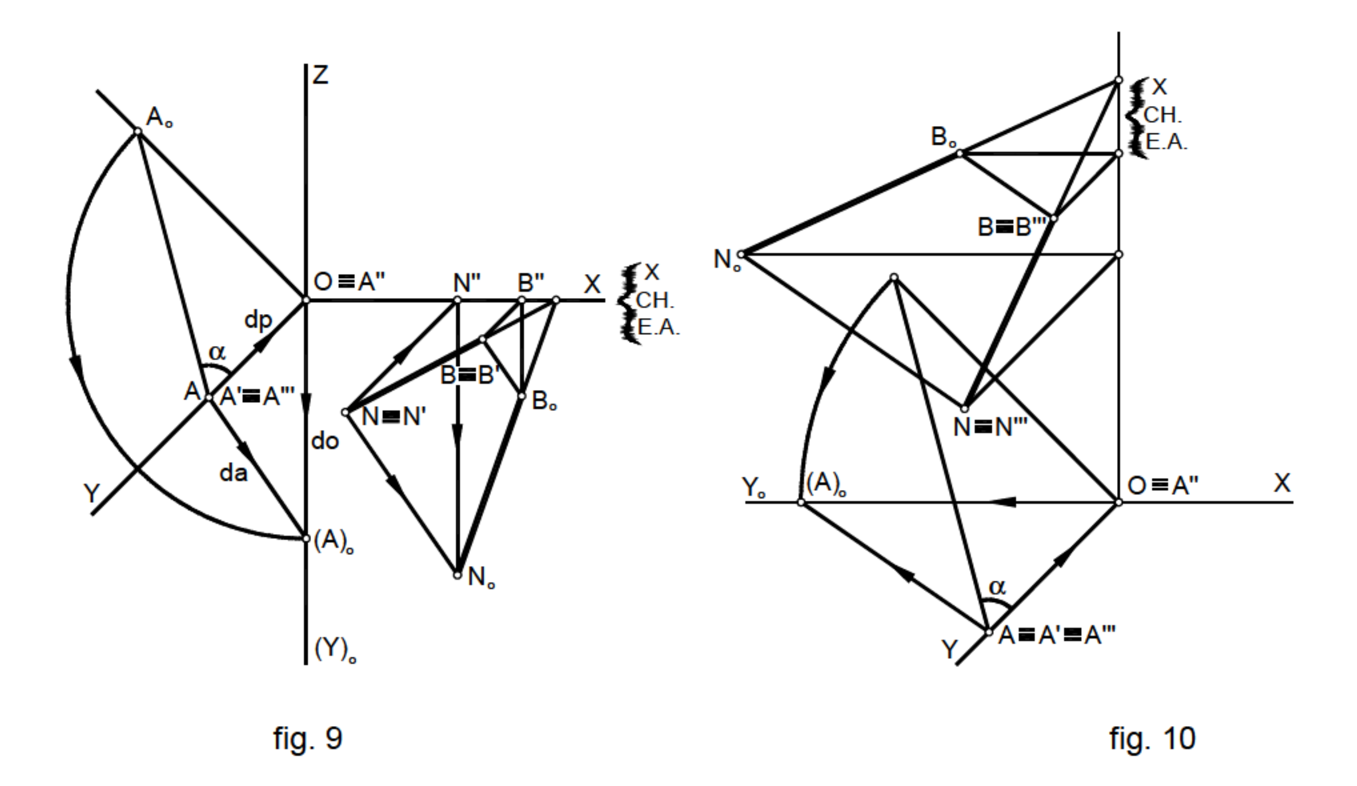


fig. 9 fig. 10

8. PERPENDICULARIDAD

(Procedimientos generales de resolución)

I.- Recta perpendicular a un plano.

Se trata de trazar por el punto P(P'-P") una recta r(r'-r") perpendicular al plano dado $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Cada una de las proyecciones de la recta -r- pasará por las correspondientes del punto P y serán perpendiculares a las trazas del mismo nombre del plano. Según esto, r" pasará por P" y será perpendicular a α_2, posición que podremos trazar directamente por producirse sobre el cuadro.

La proyección r' pasa por P' y es perpendicular a α_1; para trazarla recurriremos al abatimiento, por lo que abatiremos P' en P'_o y α_1 en $(\alpha_1)_o$, la recta que pasa por P'_o y es perpendicular a $(\alpha_1)_o$ en el punto $1'_o$ es la r'_o, obteniéndose su desabatimiento al unir los puntos P' y 1'.

Obtenidas las proyecciones r' y r" de la recta, ésta queda definida.

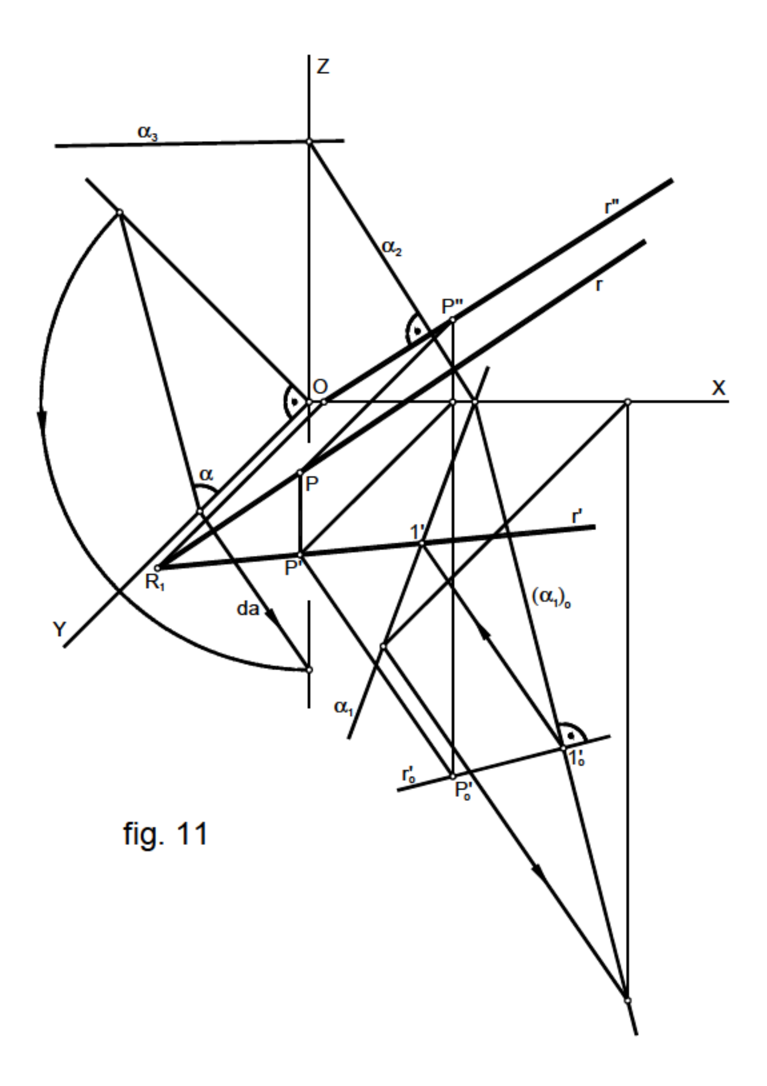


fig. 11

II.- Plano perpendicular a una recta.

Para trazar por un punto P-P’, el plano perpendicular a una recta r(r'-r") basta abatir la proyección r' en r'_o mediante los puntos (1 y A).

Se traza luego la normal $(D\alpha_1)_o$, obteniendo al desabatir la recta $D\alpha_1$, dirección de la traza del plano buscado.

Haremos pasar por el punto P una horizontal h, por cuyas trazas H_2 y H_3, pasarán las del plano α. La α_2 será perpendicular a r" y la α_1 paralela a la dirección obtenida anteriormente. La traza α_3 pasará por H_3 y unirá los puntos en los ejes obtenidos por las otras trazas (fig.12).

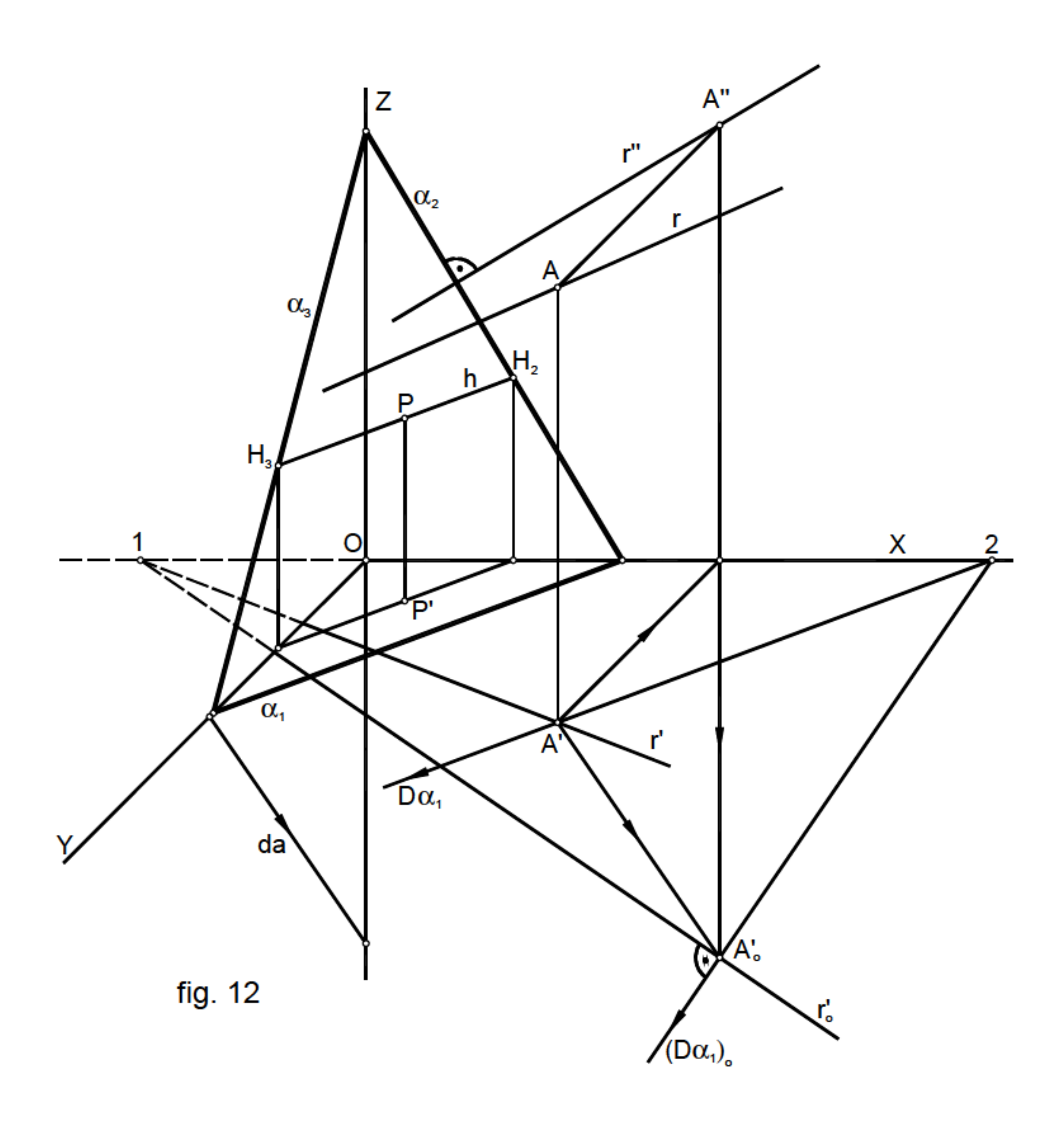


fig. 12

9. DISTANCIAS

*.- Distancia entre dos puntos.

Supongamos dos puntos cualesquiera (A-A') y (B-B') tales que el segmento que los une es oblicuo a los planos del sistema. La distancia que separa estos puntos es en proyección el segmento (d-d'). La verdadera magnitud D es la hipotenusa del triángulo ABC del espacio, en el cual el cateto AC = h es equivalente a la diferencia de cotas de los puntos A y B. El otro cateto BC es equivalente a la proyección d' cuya verdadera magnitud obtendremos en d'_o. La obtención del triángulo que contiene a D es inmediata (fig. 13).

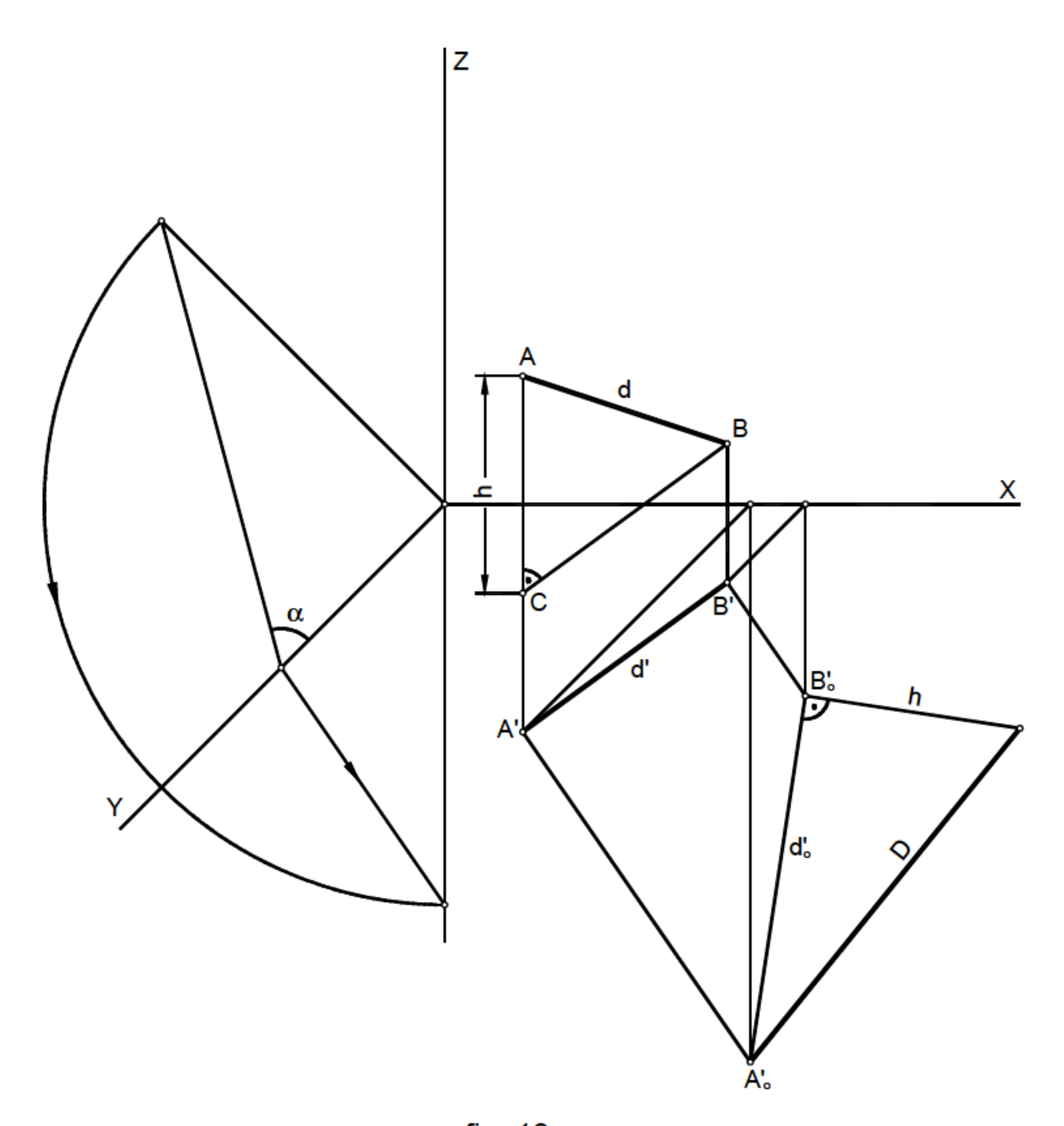


fig. 13

10. ABATIMIENTOS

*- Abatimiento de elementos fundamentales (P, r, α).

Sea un plano α que deseamos abatir sobre el cuadro. La charnela será la traza α_2. Tomaremos el punto 1-1'-1", común a α_3 y α_1, trazas que vamos a abatir. Por la proyección 1" se traza perpendicular y paralela a la charnela. Abatimos el punto 1, contenido en XOY, para conocer su distancia al plano de abatimiento, ésta será (1"1_o), magnitud que llevamos sobre la paralela a la charnela según (1"-$(1)_o$).

Con centro en M y radio de giro M$(1)_o$, trazaremos un arco hasta cortar a 1"-M en el punto 1_o. Los puntos dobles de la charnela, unidos con 1_o nos proporcionan las trazas del plano abatido $(\alpha_1)_o$ y $(\alpha_3)_o$.

Como en los demás sistemas estudiados, existe una relación de afinidad entre la proyección directa y su abatimiento sobre el cuadro; los elementos de la afinidad pueden apreciarse en la (fig.14).

Para abatir un punto cualquiera P del plano, se opera siguiendo la ley del abatimiento, anteriormente expuesta, y realizada en la figura.

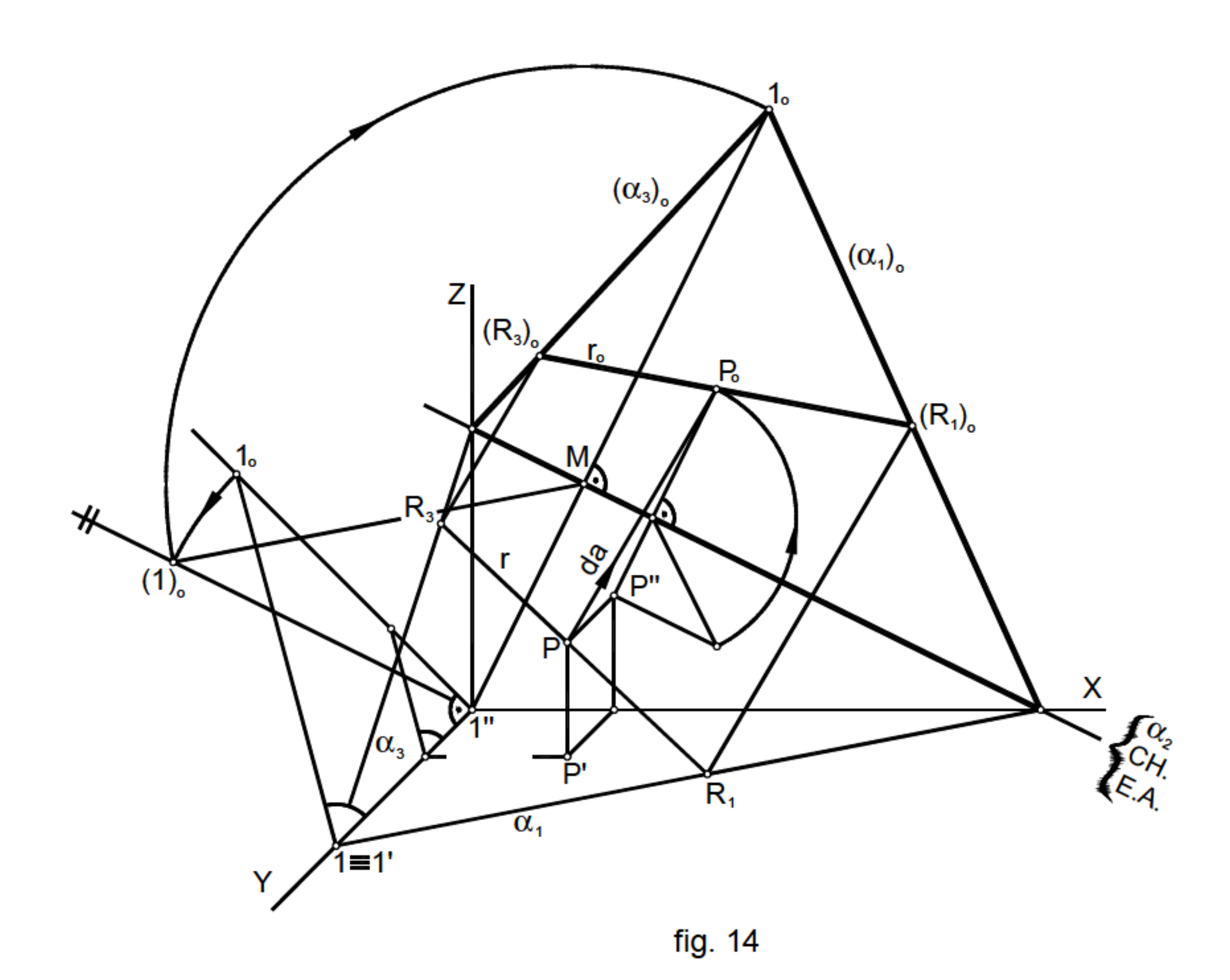


fig. 14

*.- Abatimiento de una forma plana.

Sea el plano $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sobre el que se encuentra situada una figura poligonal cualquiera ABCDE.

Abatimos el plano sobre el cuadro, sirviéndonos en principio del punto 1, y utilizando los fundamentos expuestos en la figura anterior.

La proyección directa de la figura y su abatimiento sobre el cuadro son dos figuras afines, afinidad de elementos antes descritos por lo que no será dificultosa la obtención de la figura abatida $A_oB_oC_oD_oE_o$.

El problema inverso, consiste en la elevación de una forma abatida, se rige por los mismos principios de ejecución.

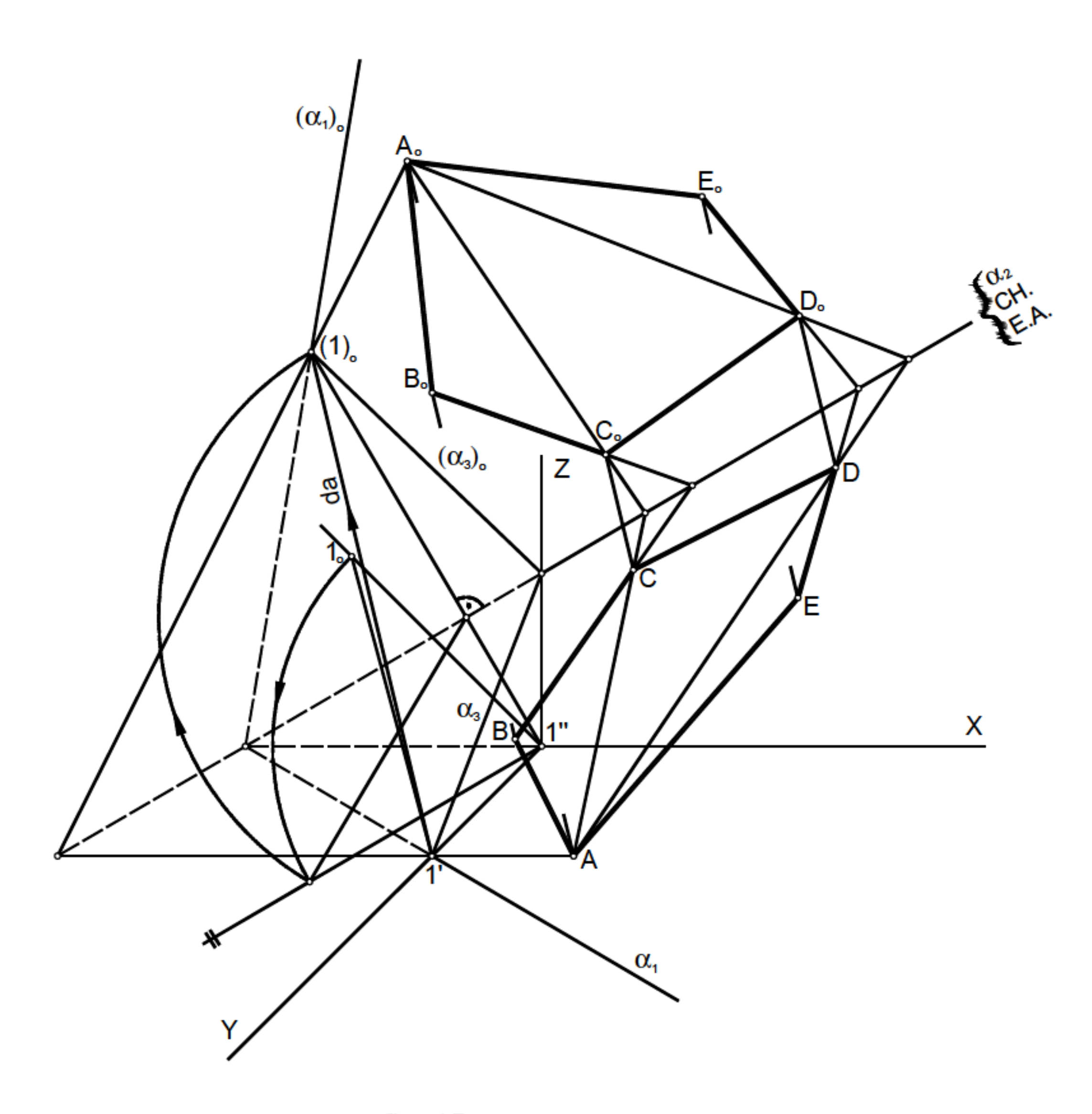


fig. 15

11. ÁNGULOS

*.- Ángulo de dos rectas.

Consideremos dos rectas (r-r') y (s-s') que se cortan en el punto (P-P').

Sus trazas con el plano del cuadro son los puntos R_2 y S_2, por las que pasará la traza α_2 del plano que contiene a ambas.

Abatido el punto P, vértice del ángulo, en P_o, obtendremos las rectas abatidas r_o y s_o, mostrándonos en verdadera magnitud el ángulo A que abarcan (fig.16).

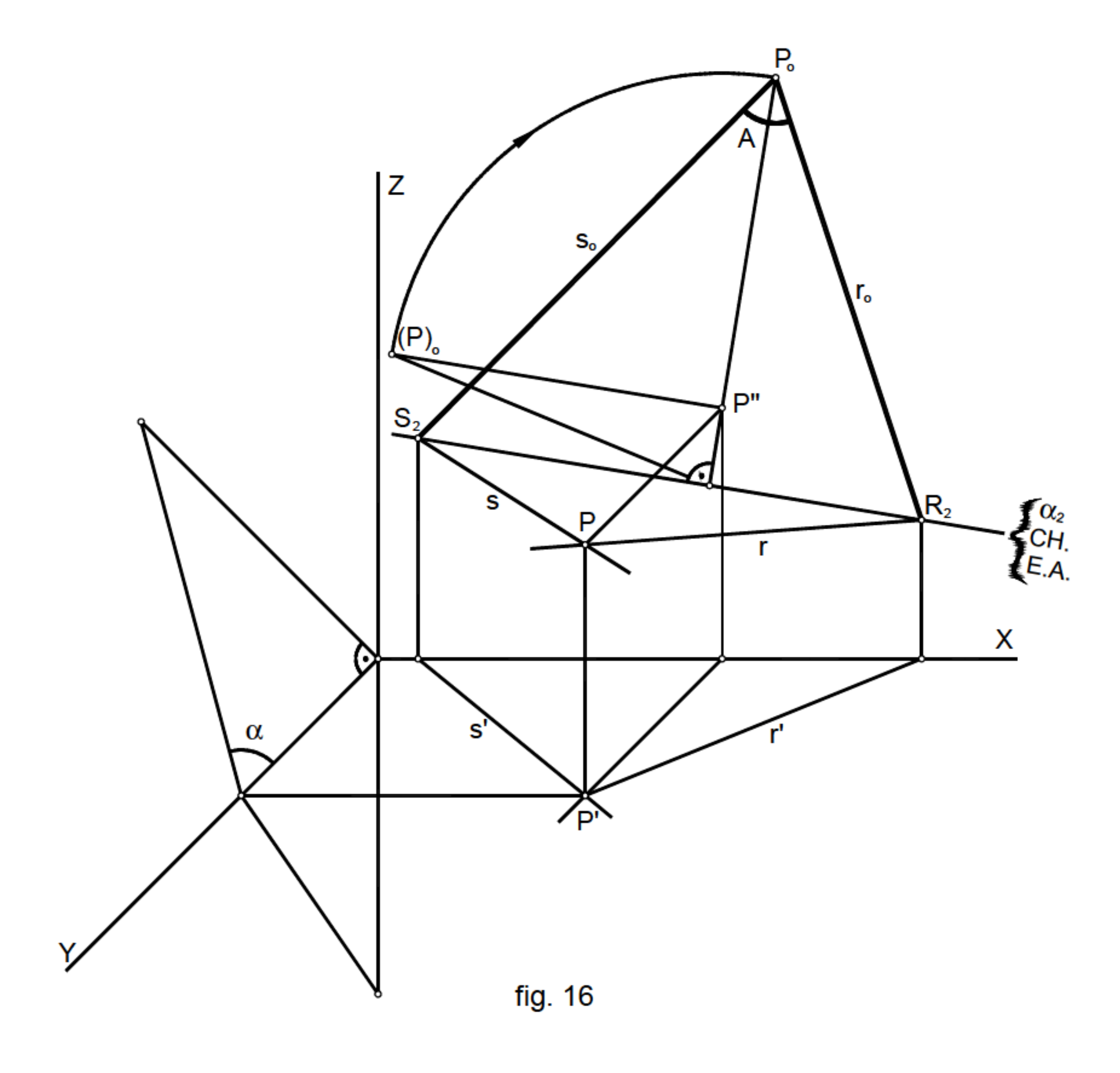


fig. 16

*.- Angulo de una recta con los planos de proyección.

Sea una recta oblicua (r-r'-r''-r''') que forma con cada uno de los planos, los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ es decir, los ángulos que forma la proyección directa -r- con cada una de las otras tres proyecciones. Para; hallar la verdadera magnitud de estos ángulos, basta realizar el abatimiento de cada uno de los planos proyectantes de la recta (figs.17 y 18).

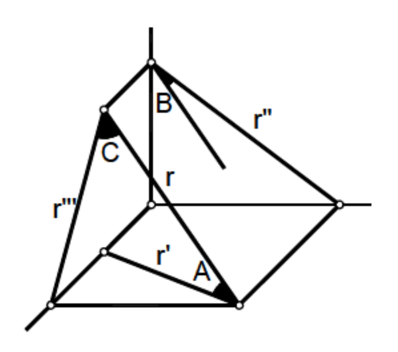


fig. 17

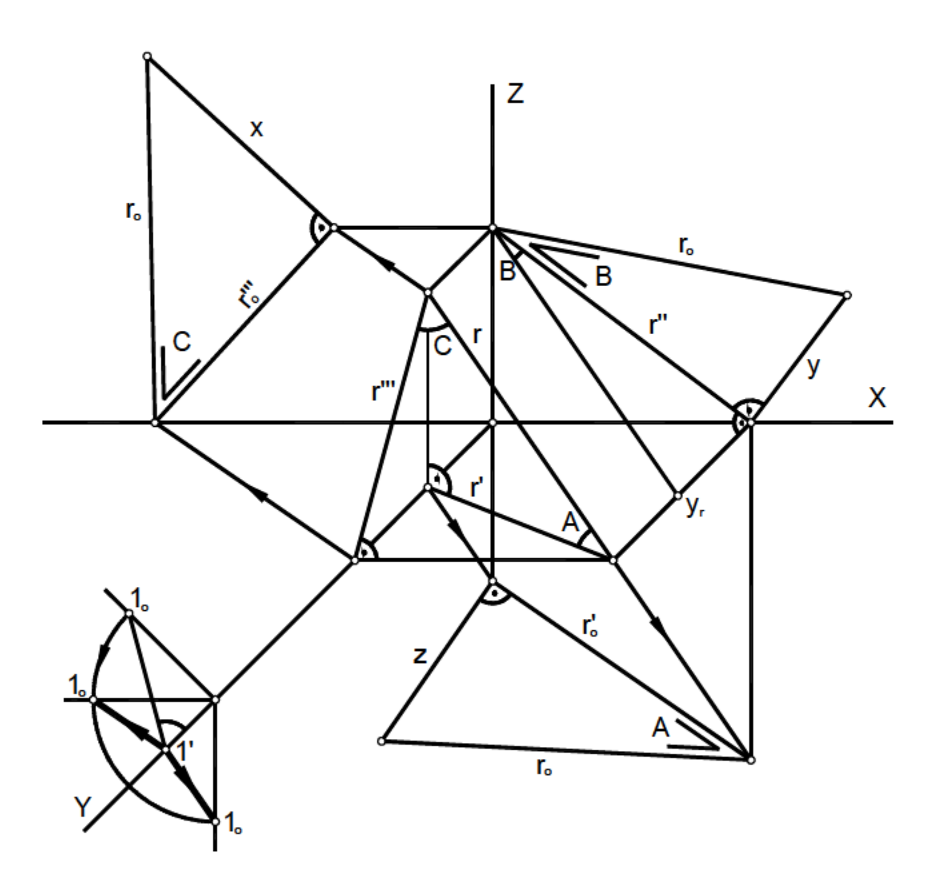


fig. 18

*.- Angulos que forma un plano con los de proyección.

Para determinar el ángulo $\hat{B}$ que forma un plano oblicuo $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ con el plano del cuadro o XOZ, tomamos un punto P de α y trazamos por él la l.m.p. con respecto al plano XOZ.

Esta recta t-t", tendrá su proyección t" perpendicular a α_2 y la proyección t unirá P con la traza N.

El ángulo $\hat{B}$ es el que forman en proyección t y t", su verdadera magnitud se obtiene en la (fig.19).

Por el mismo procedimiento se obtiene el ángulo $\hat{A}$, que forma el plano α con el XOY. Por el punto P-P", trazamos la l.m.p. correspondiente al plano. Para obtener p' hay que abatir P' y α_1 según P'$_o$ y $(\alpha_1)_o$, la perpendicular trazada, nos da al desabatirla, la proyección P' y con ésta el punto M, que unido con P nos proporciona la proyección P. El valor real del ángulo $\hat{A}$, se obtiene construyendo el triángulo rectángulo de catetos p' y h.

El ángulo $\hat{C}$ que forman los planos α y ZOY es el mismo que el formado por las proyecciones P y P''' de la l.m.p. de un plano con respecto a otro.

Se procede como en la figura anterior, realizando la obtención de la l.m.p. en el abatimiento del plano ZOY sobre el cuadro. En la (fig.20) aparece el triángulo rectángulo con la magnitud verdadera del ángulo $\hat{C}$.

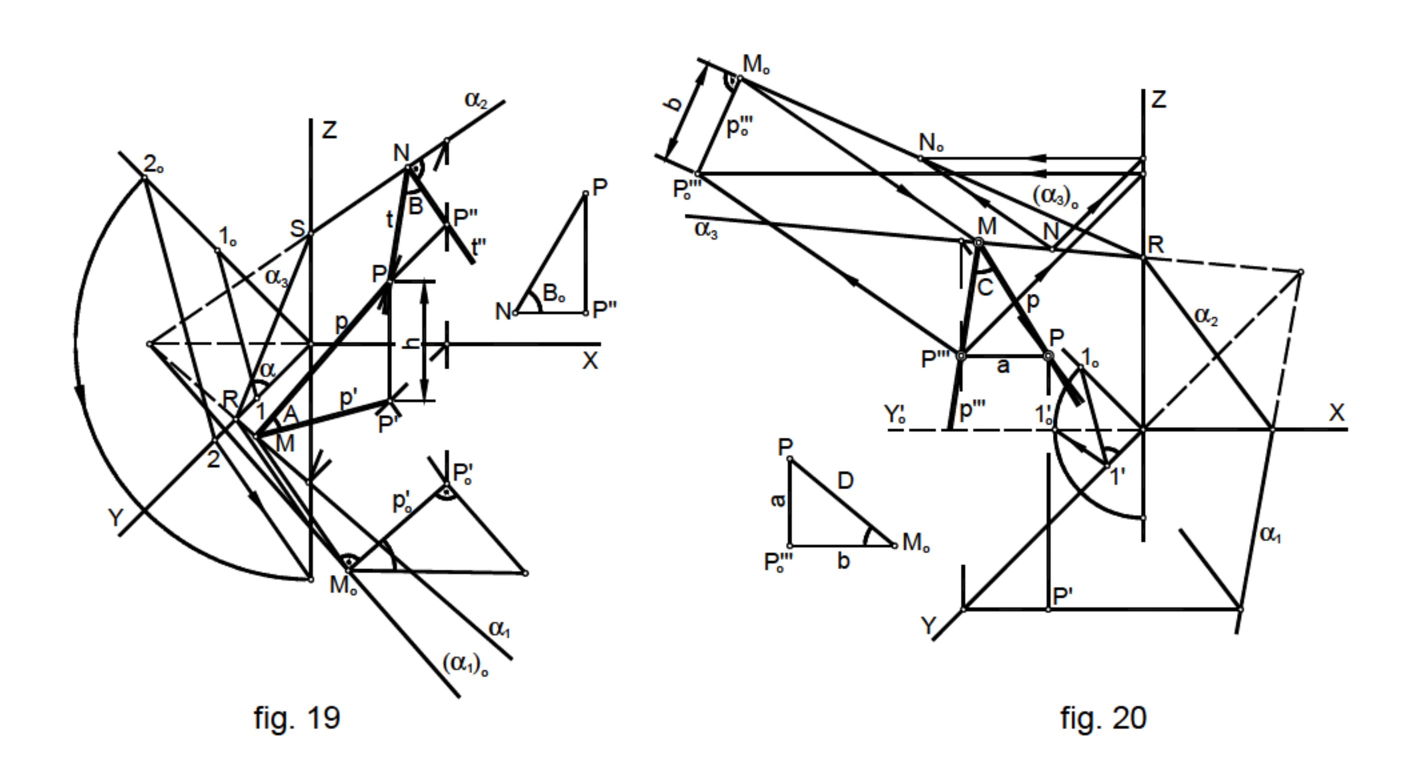


fig. 19

fig. 20

12. CONSTRUCCIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN PERSPECTIVA CABALLERA

En las (fig.21, 22 y 23), se realiza la construcción de la circunferencia sobre los planos ZOY y XOY en las que aparece según elipses y sobre el cuadro según circunferencias.

En la última de las figuras, la elipse se ha construido como un óvalo, dado que el coeficiente del sistema es igual a la unidad.

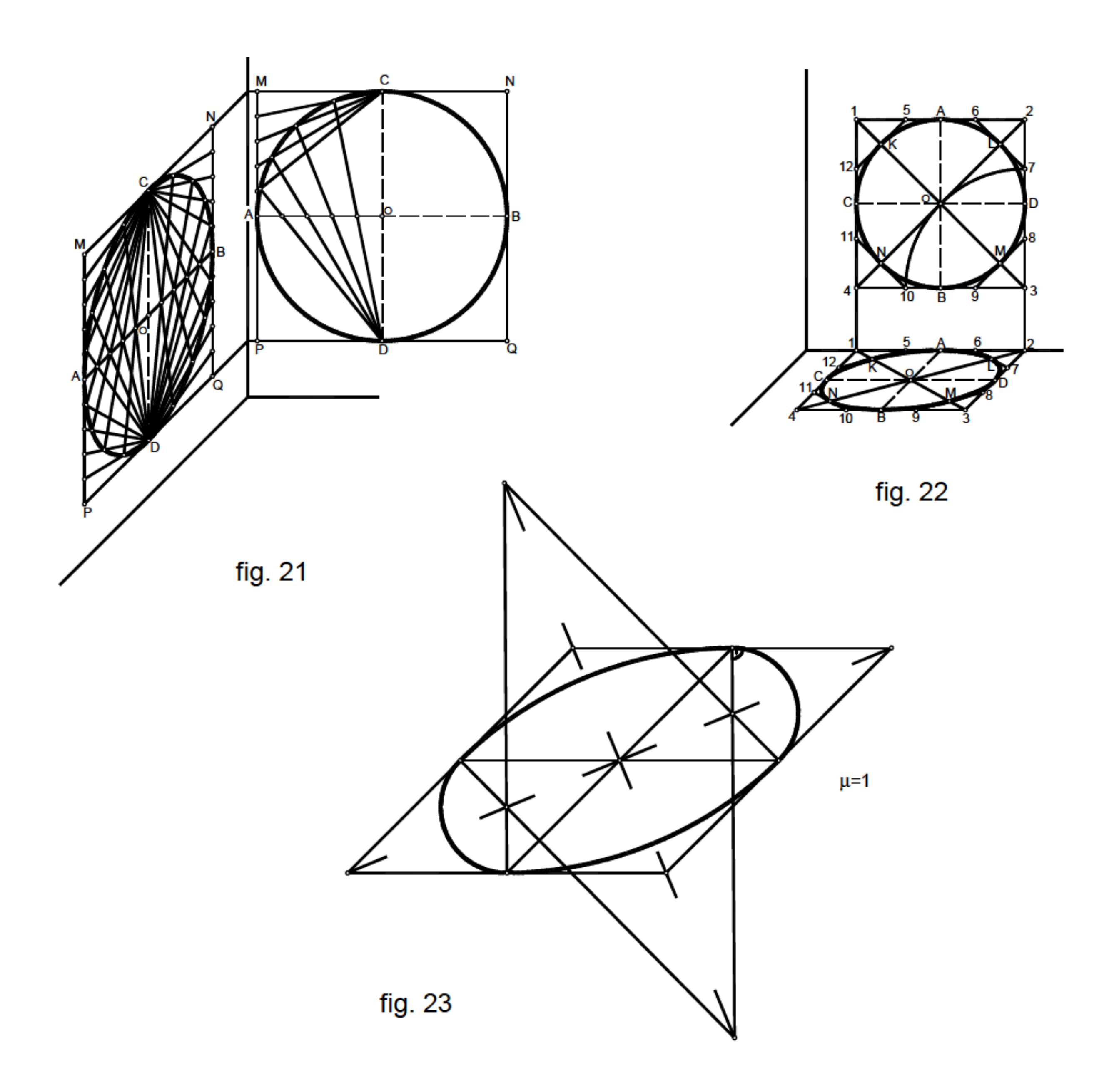


fig. 21

fig. 22

fig. 23

En la (fig.24), supuesta la circunferencia en el cuadro, se establece la relación de afinidad con su representación sobre el XOY. Se abate O' en 0_0, la mediatriz del segmento $0'0_0$ nos determina al cortar al eje de la afinidad (eje X) el centro de la circunferencia, que una vez trazada corta en los puntos M y N al eje.

Los puntos M y N unidos respectivamente con los centros O' y 0_o nos determinan sobre la circunferencia una pareja de diámetros que se transforman en los ejes de la elipse situada en el plano horizontal.

También se determinan en la figura los diámetros conjugados de la elipse, afines de los diámetros de la circunferencia, situados en posición paralela y perpendicular al eje de la afinidad.

De idéntica forma se puede establecer la afinidad con respecto al plano ZOY.

Dependiendo del valor de $O'A'_1$ y O'A', varían los del ángulo α y por tanto la relación de medida entre los ejes y diámetros conjugados, lo que permite la construcción de "Gráficos de elipse", con los que podemos hallar los centros de curvatura y realizar el trazado con el compás.

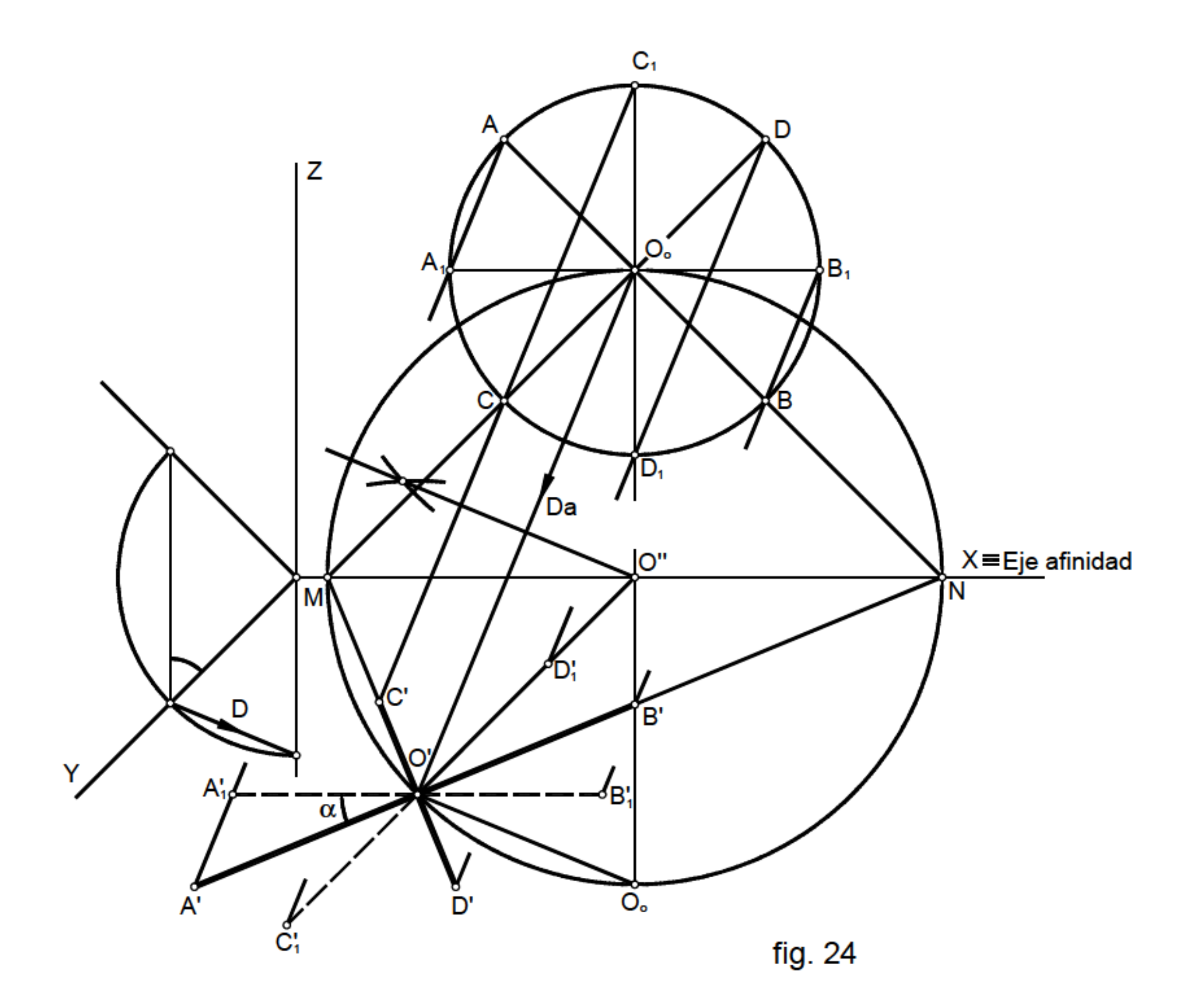


fig. 24

13. PERSPECTIVA CABALLERA DE LOS POLIEDROS

*.- Representación del octaedro con una cara sobre el XOY.

Consiste fundamentalmente en el paso del sistema Diédrico a Caballera (ver pag.91).

Se dibujan en primer lugar las proyecciones diédricas del octaedro; la proyección horizontal se corresponde con el abatimiento, por lo que habrá que determinar siguiendo la dirección de afinidad la proyección horizontal del poliedro en P.C.(1', 2', 3', 4', 5', 6').

Por estos puntos obtenidos se levantan verticales sobre las que llevaremos las alturas correspondientes a cada punto y que iremos tomando, en la proyección vertical del poliedro. Realizada esta operación obtendremos la proyección directa de los vértices del octaedro, los cuales uniremos adecuadamente, teniendo en cuenta las partes vistas y ocultas, dándoles a estas últimas el tratamiento de línea discontinua.

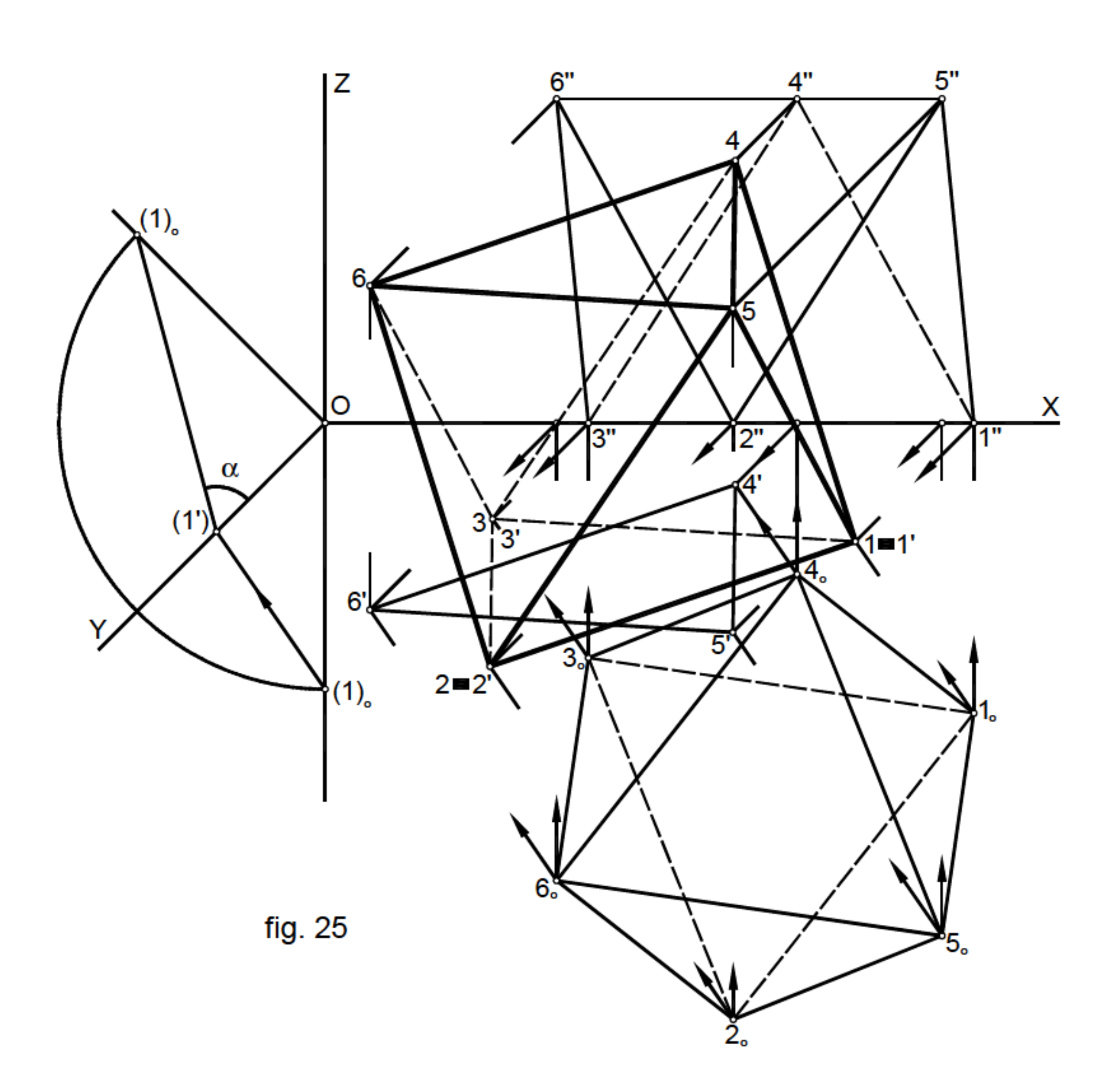


fig. 25

*.- Hexaedro con una cara sobre un plano proyectante.

Abatimos en primer lugar el plano α sobre el cuadro, utilizando como charnela su traza natural α_2, en el abatimiento dibujamos el cuadrado $1_o2_o3_o4_o$, que será la cara apoyada en el plano (fig.26).

Establecida la afinidad de eje α_2 y dirección "d_a" obtendremos la proyección directa del cuadrado 1, 2, 3, 4. De estos puntos parten las aristas perpendiculares a la cara y por tanto al plano α; perpendicularidad cuya dirección obtenemos en el abatimiento de la traza α_1, siendo d'_o perpendicular a $(\alpha_1)_o$, determinando al desabatir la dirección de la arista d'.

Sobre d'_o, llevamos la magnitud -l- de la arista, determinando, según OB' las medidas que llevaremos sobre las perpendiculares al plano por los puntos de la cara apoyada.

Determinaremos así los vértices 5, 6, 7 y 8 que delimitan la cara paralela a la apoyada, completando así la perspectiva del cubo.

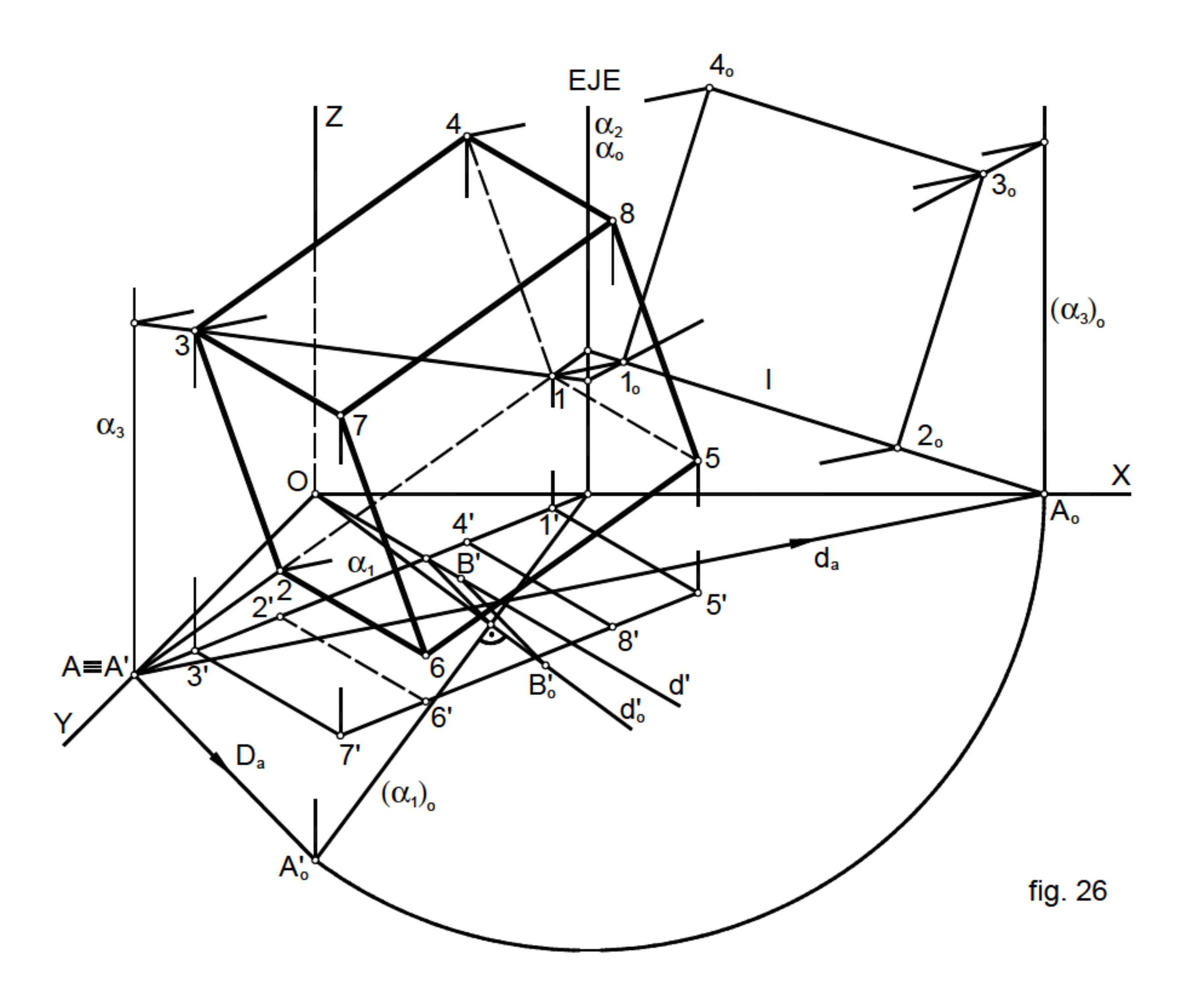


fig. 26

*.- Tetraedro con una cara en posición vertical.

Siguiendo las indicaciones seguidas en el caso anterior, en la (fig.27) se ha obtenido la perspectiva del tetraedro que al tener una cara en posición vertical la suponemos situada en un plano α proyectante vertical, el cual abatimos y en el abatimiento dibujamos la proyección del poliedro sobre el plano.

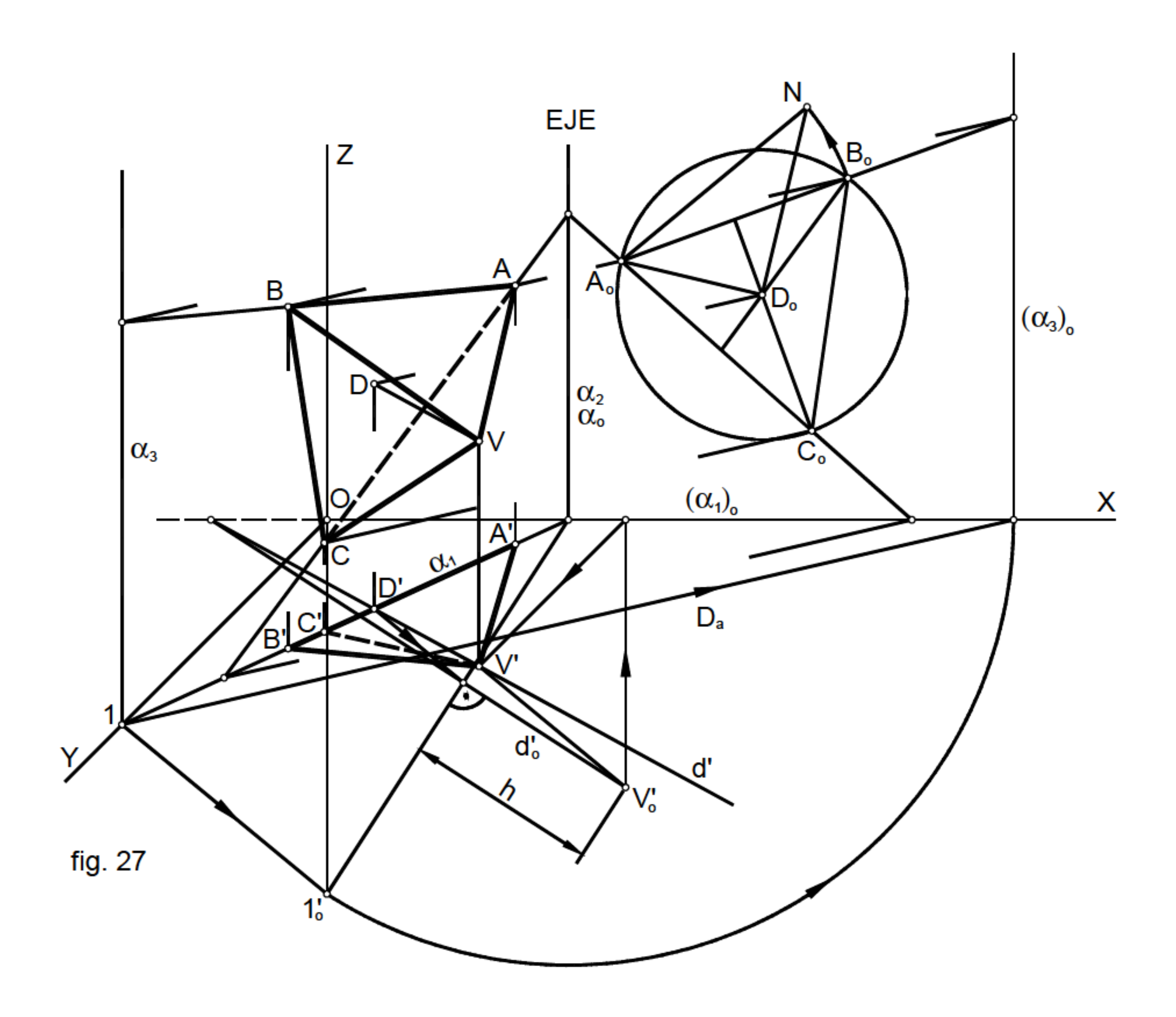


fig. 27

*.- Proyección directa de un cubo con una cara sobre un plano oblicuo.

En primer lugar y sobre el abatimiento del plano sobre el cuadro, dibujamos la cara apoyada en verdadera forma. Por afinidad transformamos los puntos característicos de ésta 1_o, 2_o, 3_o, 4_o en los de la proyección directa 1, 2, 3, 4. Por el punto 1 hacemos pasar una recta p, perpendicular al plano α, que vendrá definida por sus proyecciones p" perpendicular a α_2 y p' perpendicular a α_1.

A partir del punto 1 aplicamos la magnitud "l" reducida, reducción que llevamos a cabo en un abatimiento sobre el horizontal, resolviendo un problema sencillo de distancias; así situamos el vértice 5 y mediante paralelas los 6, 7 y 8 restantes.

Este procedimiento es válido para cualquier superficie radiada, cónica o cilíndrica.

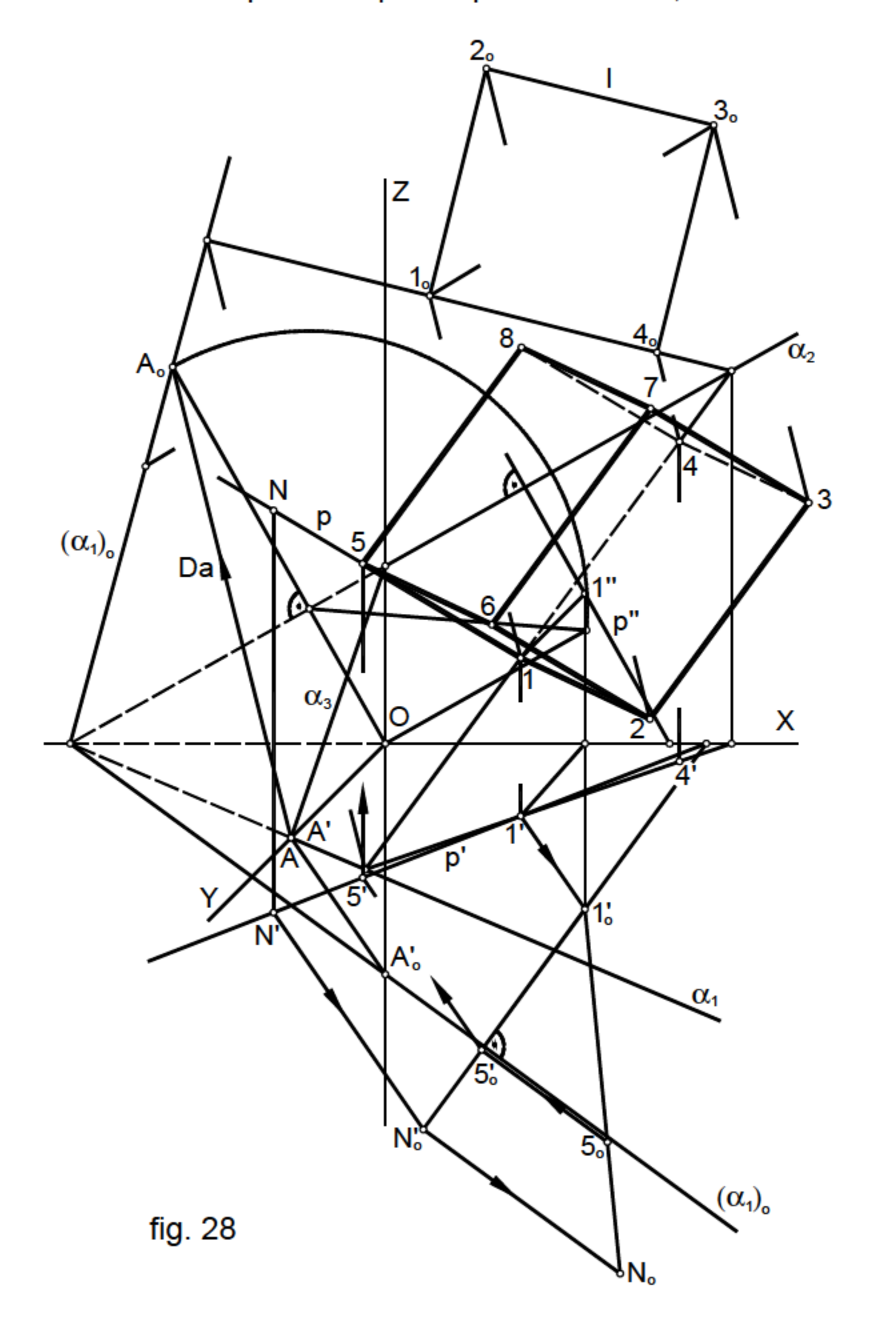


fig. 28

14. REPRESENTACIÓN DE SUPERFICIES RADIADAS Y ESFERA. SECCIONES. INTERSECCIÓN CON RECTAS

*.- Cono recto apoyado en el horizontal, sección oblicua.

En el abatimiento del plano horizontal se dibuja la base circular del cono de revolución, obteniéndose la elipse perspectiva, a la cual trazaremos tangentes desde el vértice V, situado en la vertical trazada desde el centro de la base y a la altura del cono.

En la (fig.29) se ha obtenido la sección producida por un plano oblicuo α. Teniendo en cuenta que la base y la sección son figuras homólogas, se determina en primer lugar una pareja de puntos homólogos, hallando la intersección del eje "e" con el plano α, a continuación el resto de puntos apoyándose en la pareja obtenida.

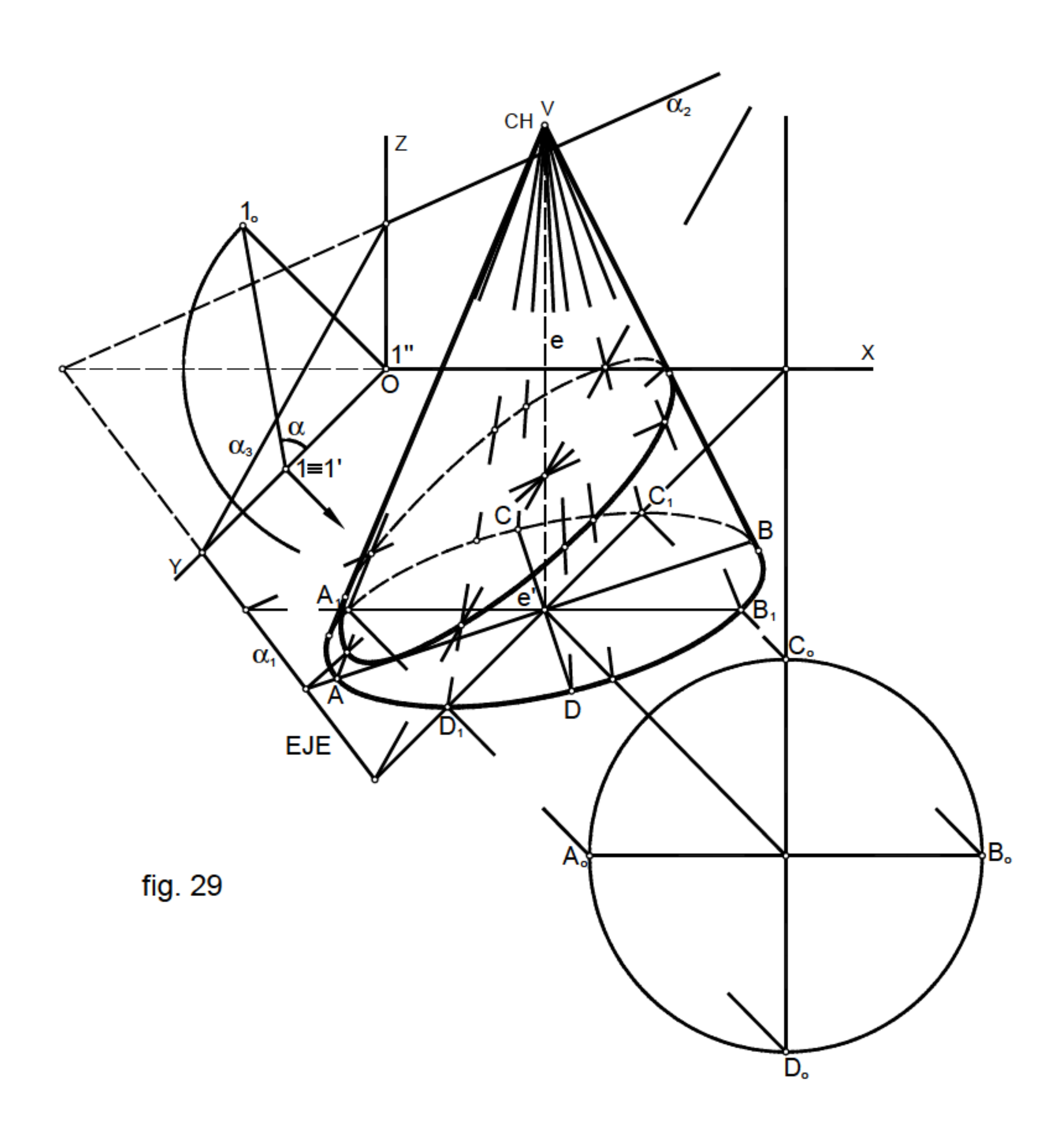


fig. 29

*.- Cono de revolución apoyado en el horizontal, sección vertical.

En esta figura podemos apreciar otra forma para la construcción de la base del cono. Una vez construida la superficie cónica, la seccionamos mediante un plano proyectante, produciéndose una sección hiperbólica por ser α un plano paralelo a una pareja de generatrices.

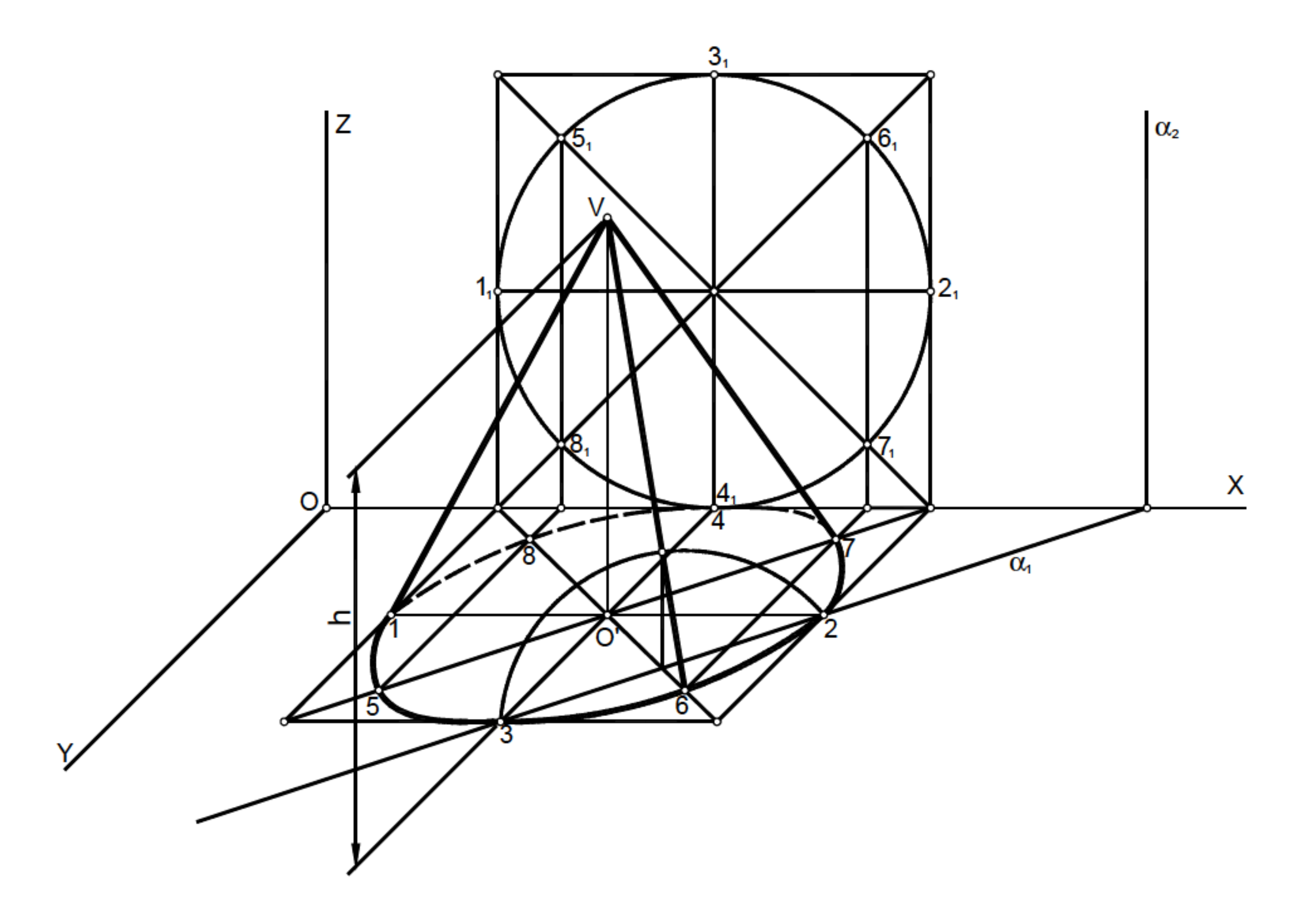


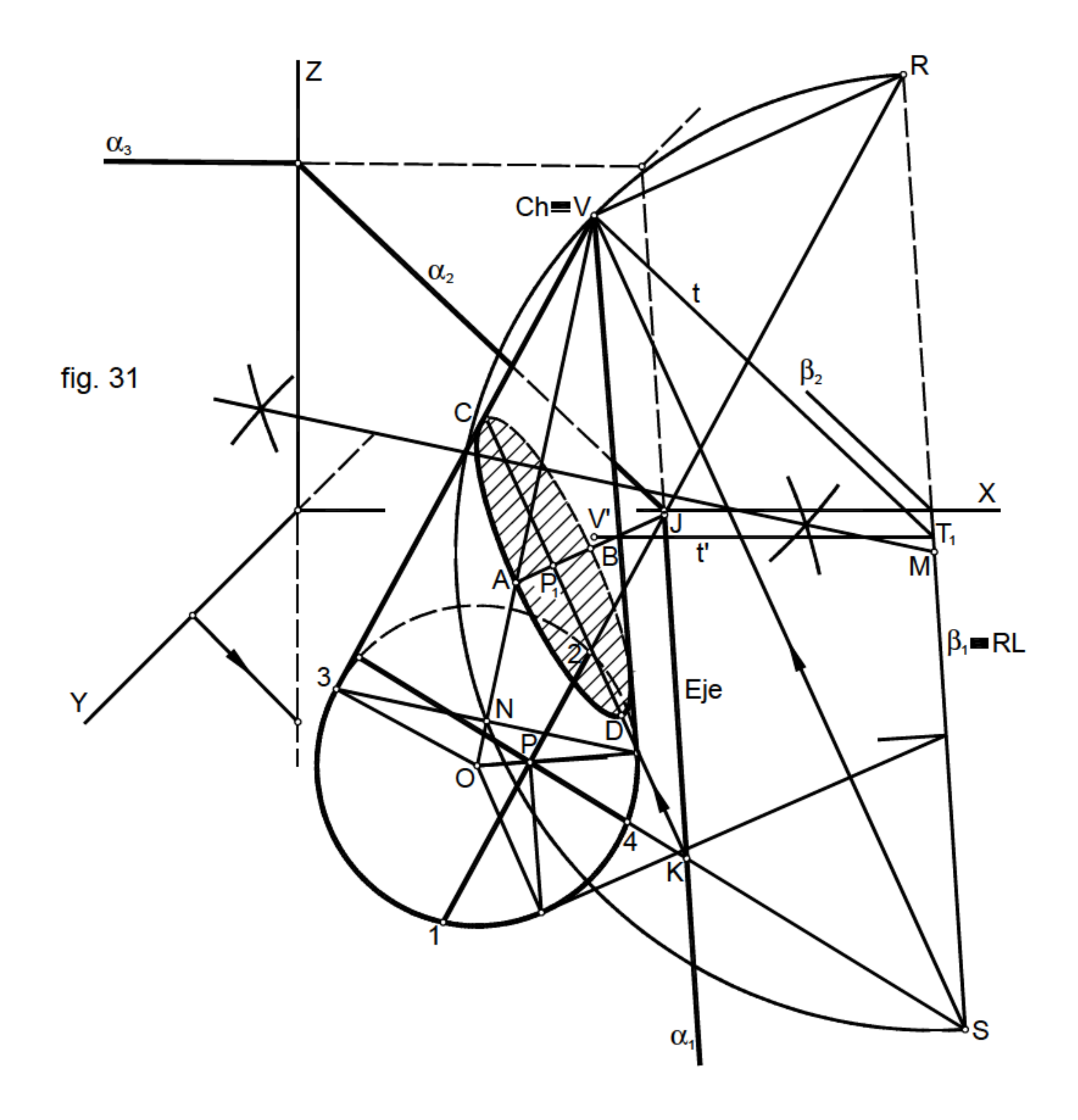
fig. 30

*.- Sección plana, de un cono. Resolución por homología.

Apliquemos la relación homológica que se establece entre las secciones planas de las superficies radiadas y sus bases respectivas.

Tenemos un cono de vértice V y directriz circular en el plano XOY. El plano α corta a la superficie según una elipse que vamos a determinar. El eje de la homología será α_1, el vértice V el centro, y la recta límite β_1, traza horizontal del plano que pasa por el vértice y es paralelo al secante.

El homólogo del centro de la elipse es el polo P de la recta límite respecto de la circunferencia. Se halla el conjugado armónico del centro Ch respecto de la circunferencia, punto N. La mediatriz de VN, corta a la R.L. en M; centro del arco que pasando por V y N corta, en R y S a la R.L. Estos puntos unidos con V nos determinan las direcciones de los ejes de la elipse sección, y unidos con el punto P los diámetros polares 1, 2 y 3, 4 que luego se transforman en los ejes de la sección AB y CD.



*.- Prisma regular recto. Puntos de intersección de una recta con su superficie.

Representada la superficie prismática se hace pasar por la recta -r- un plano que producirá una sección, que al ser coplanaria, con la recta se cortará con ella, siendo los puntos de corte E y S los de incidencia de la recta sobre la superficie prismática.

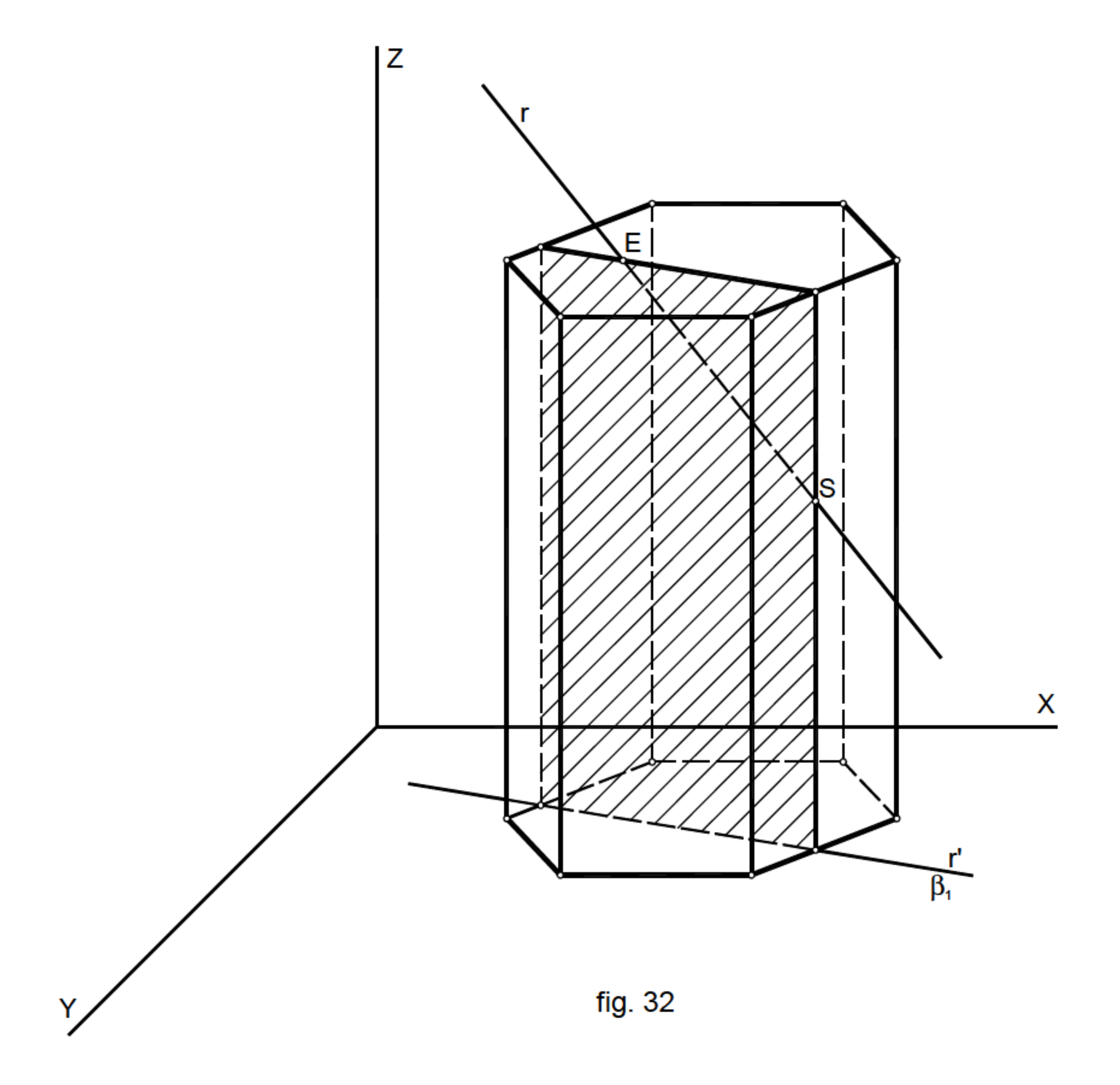


fig. 32

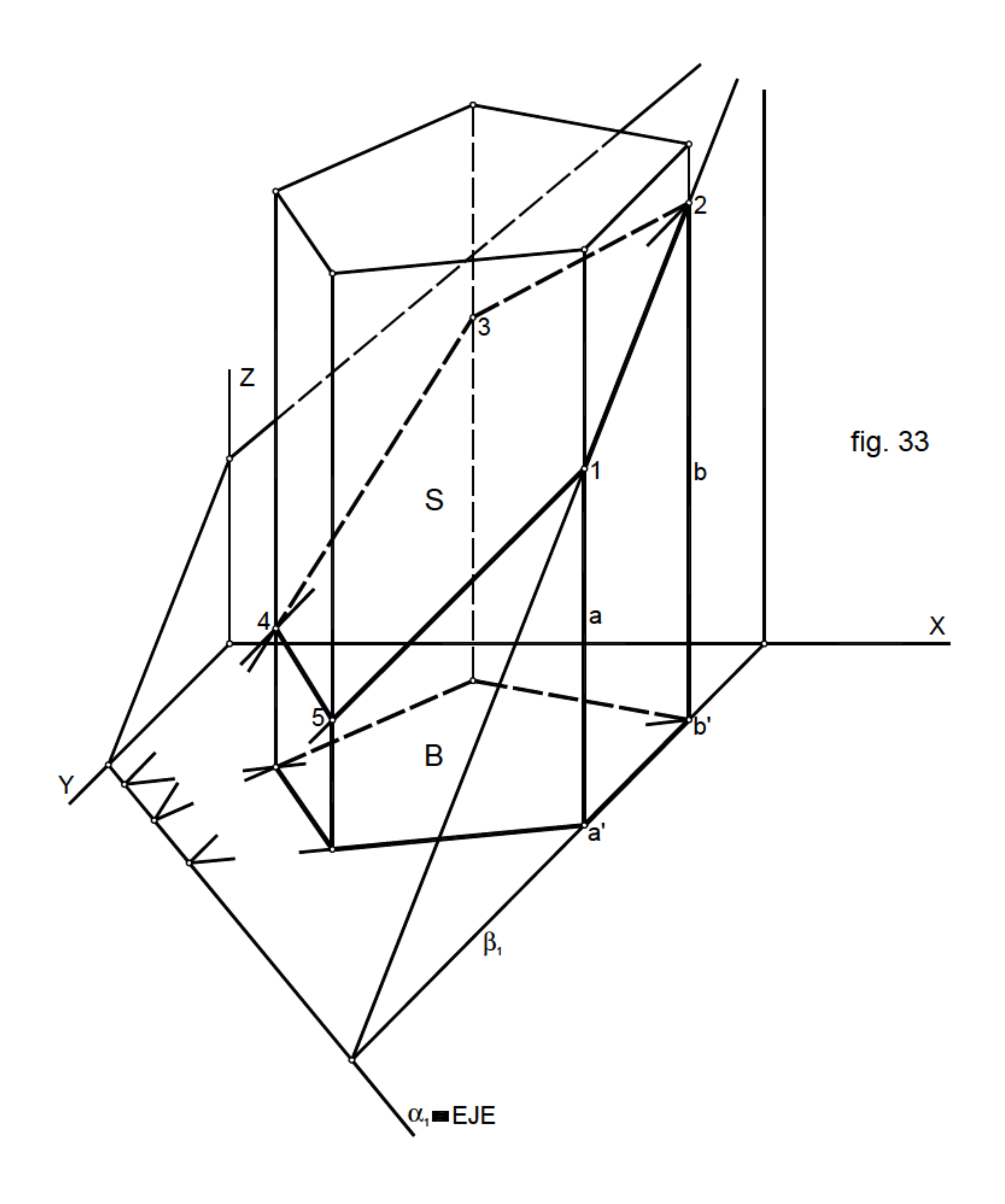
*.- Prisma recto. Sección oblicua.

Representada la superficie prismática, aplicaremos la relación de afinidad que se establece entre la base (B) y la sección (S) producida por el plano oblicuo α.

El eje de afinidad lo determinamos hallando la intersección del plano α que contiene a la figura S con el plano de proyección XOY que contiene a la figura B, es decir, α_1.

La dirección es perpendicular al horizontal, por ser el prisma recto, y para determinar parejas de puntos afines hallamos la intersección de las aristas a y b con α, puntos 1 y 2, afines respectivamente a los puntos de la base a' y b'.

Los puntos 3, 4 y 5 se obtienen por afinidad. (fig.33)



*.- Prisma recto apoyado sobre un plano oblicuo.

Se trata de la representación de un prisma cuyas características conocemos en forma y dimensiones. Suponemos una base hexagonal de lado -l- y altura del prisma -h-. En primer lugar y sobre el abatimiento del plano sobre el cuadro, dibujamos la base. Por afinidad transformamos los puntos característicos de esta en los de la proyección directa; desde cuyo punto medio trazamos una recta -e- perpendicular al plano de la base, recta que será el eje de la superficie prismática y que vendrá definida por sus proyecciones e" perp. a α_2 y e' perp. a α_1. A partir del punto C aplicaremos sobre la recta -e- la magnitud -h- reducida, resolviendo un problema sencillo de distancias y determinando el extremo superior D.

Por los vértices de la base trazaremos paralelas al eje obteniendo así las aristas laterales, y por lo tanto solo queda unir sus extremos para obtener la base superior y así la proyección directa del prisma.

Este procedimiento es válido para cualquier superficie.

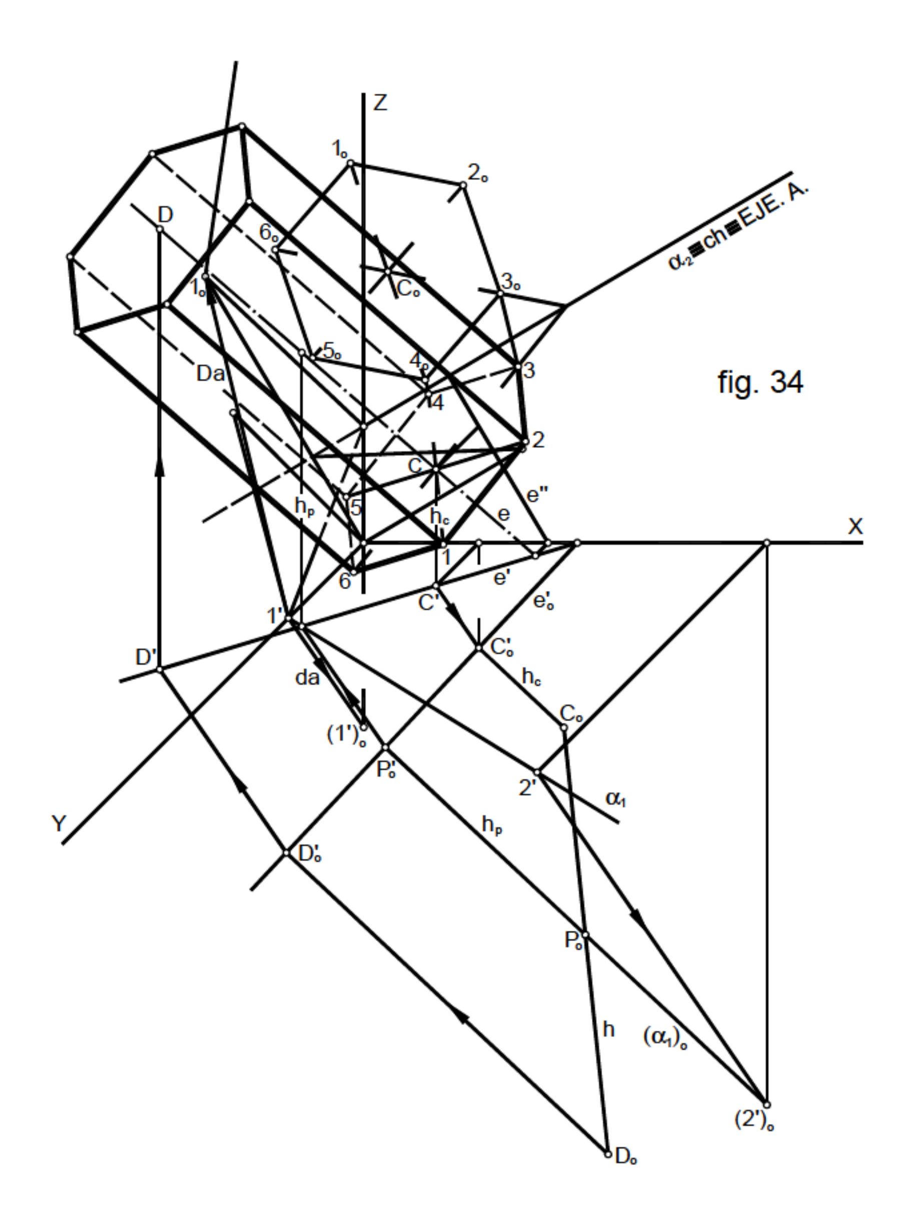


fig. 34

*.- Perspectiva de la esfera.

La perspectiva de la esfera de centro C y radio r, es la de la circunferencia de tangencia de la esfera con un cilindro proyectante sobre el cuadro.

Es por tanto una elipse cuyo eje mayor MN es la perspectiva del diámetro contenido en el plano proyectante de la dirección dp y que pasa por el centro de la esfera.

El método a seguir consiste en cortar a la esfera por planos perpendiculares al eje, resultando la envolvente de las secciones representadas en proyección directa, la perspectiva buscada.

Sobre el plano XOY aparece la proyección horizontal, obtenida por afinidad de la abatida de centro C_o'.

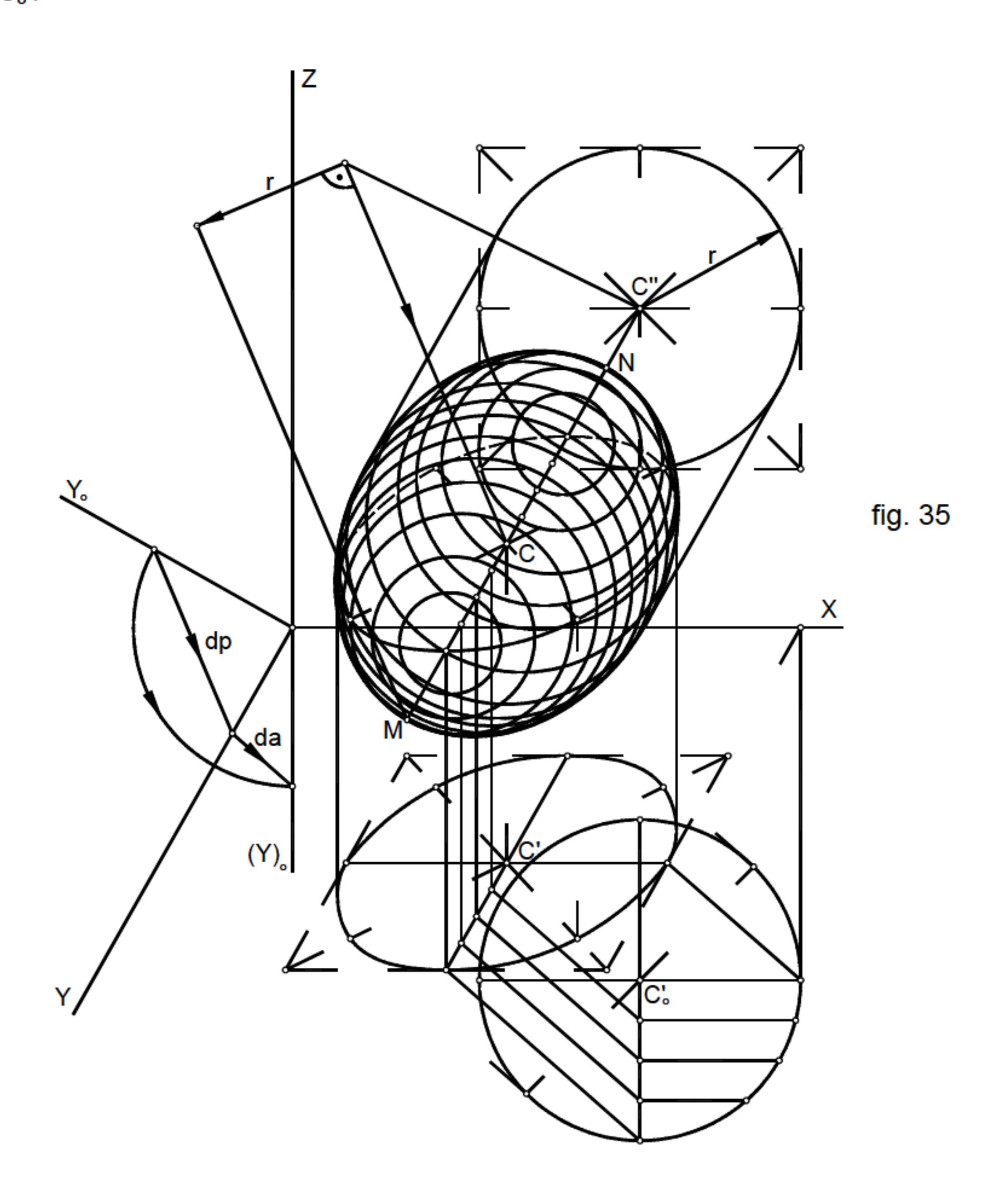
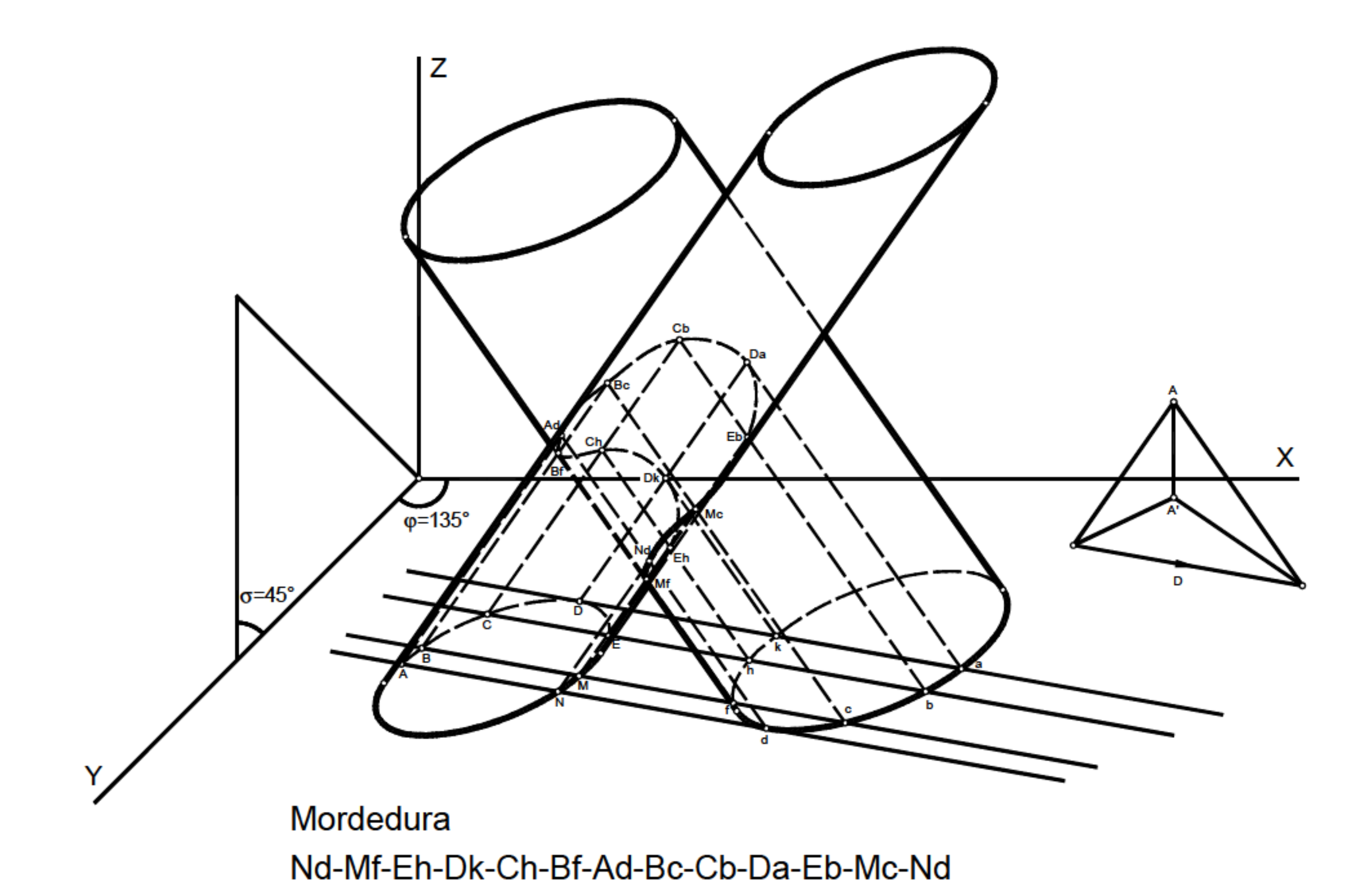


fig. 35

15. INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES

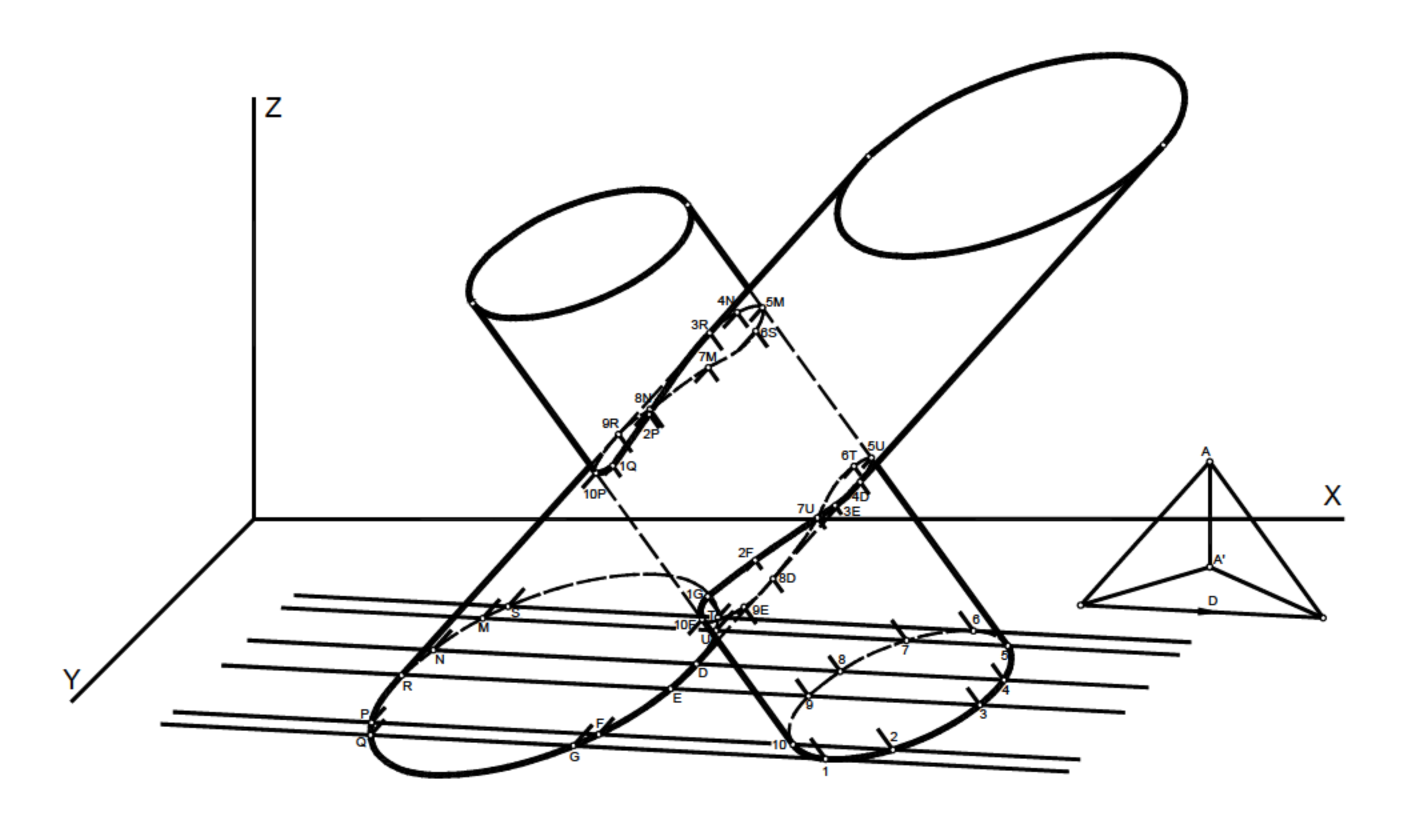
*.- Intersección de dos cilindros. Mordedura.

Por ser dos superficies de vértice impropio, por un punto exterior A se trazan paralelas a las generatrices de ambas superficies, determinando el plano director, cuya traza horizontal es la dirección que tomarán las trazas de los planos auxiliares utilizados.



*.- Intersección de dos cilindros. Penetración.

En la figura, una vez determinado el plano director, vemos como los planos tangentes a una superficie cortan a la otra, por lo tanto se trata de un caso de penetración, por lo que debemos obtener una línea de entrada y otra independiente de salida.



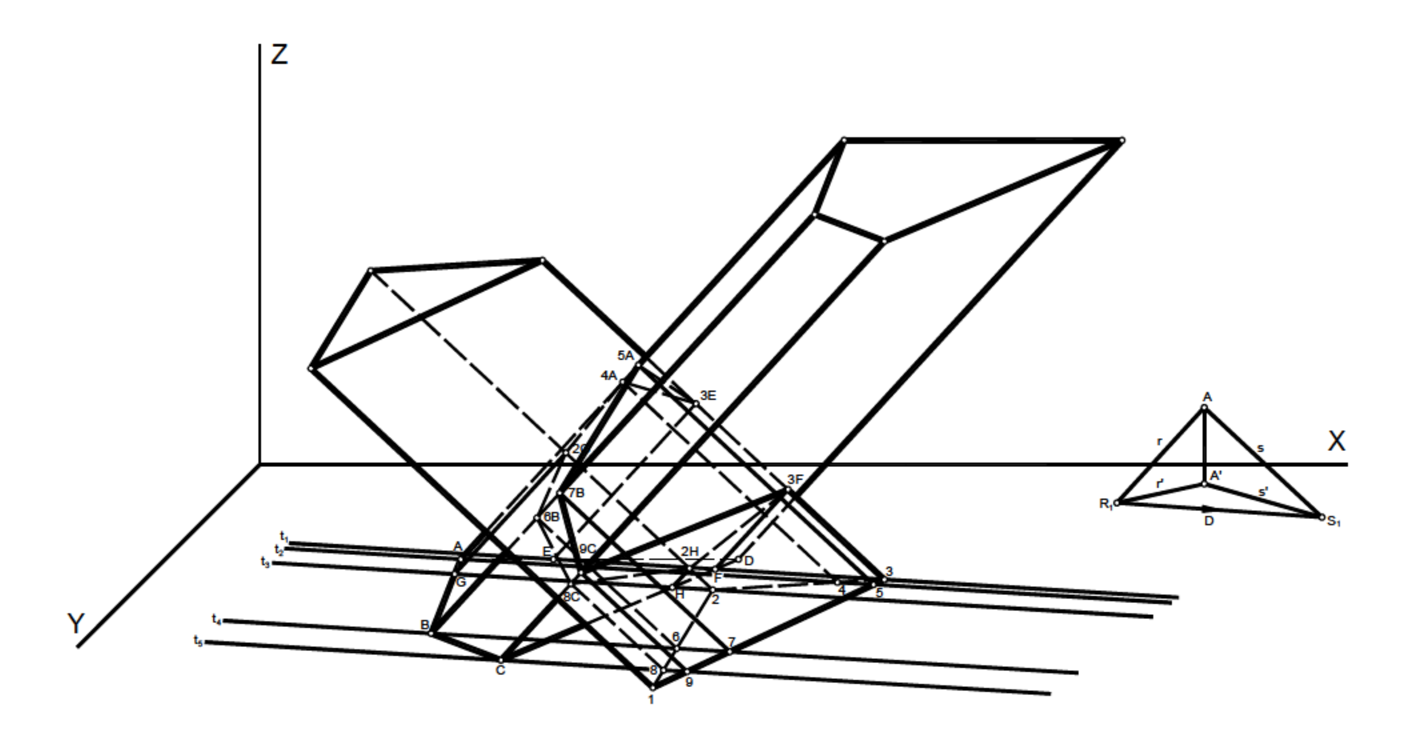
Penetración

1Q-10P-9R-8N-7M-6S-5M-4N-3R-2P-1Q

1G-10F-9E-8D-7U-6T-5U-4D-3E-2F-1G

*.- Intersección de dos prismas. Mordedura.

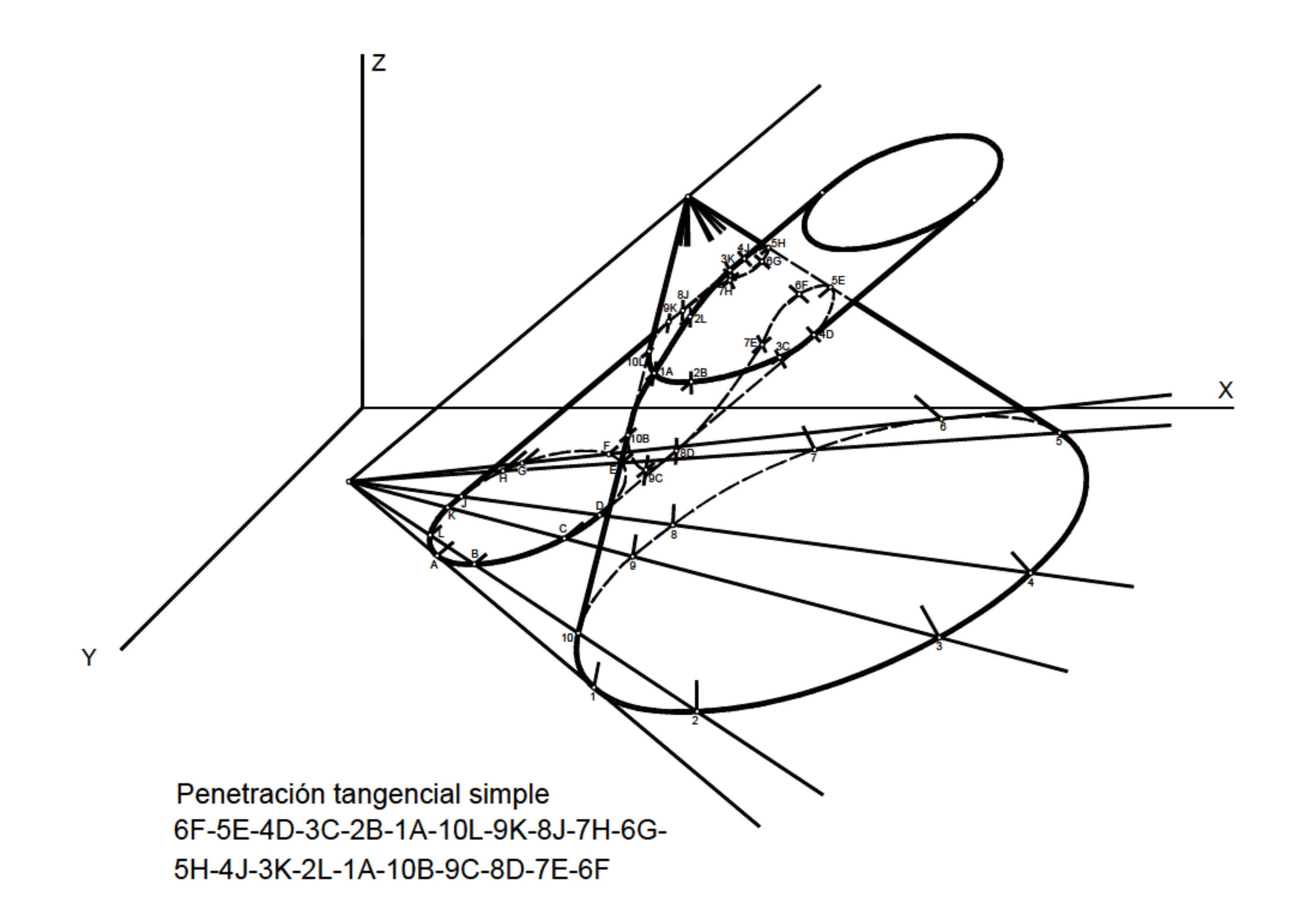
Se determina en primer lugar el plano director que será, paralelo a las aristas de ambas superficies. Los planos límites serán los que siendo paralelos al plano director pasan por las aristas de las superficies más extremas, dichos planos por cortar a las superficies contrarias, determinan una intersección denominada "Mordedura".



Mordedura
3F-2H-8C-6B-2G-4A-3E-5A-7B-9C-3F

*.- Intersección de cono y cilindro. Penetración tangencial simple.

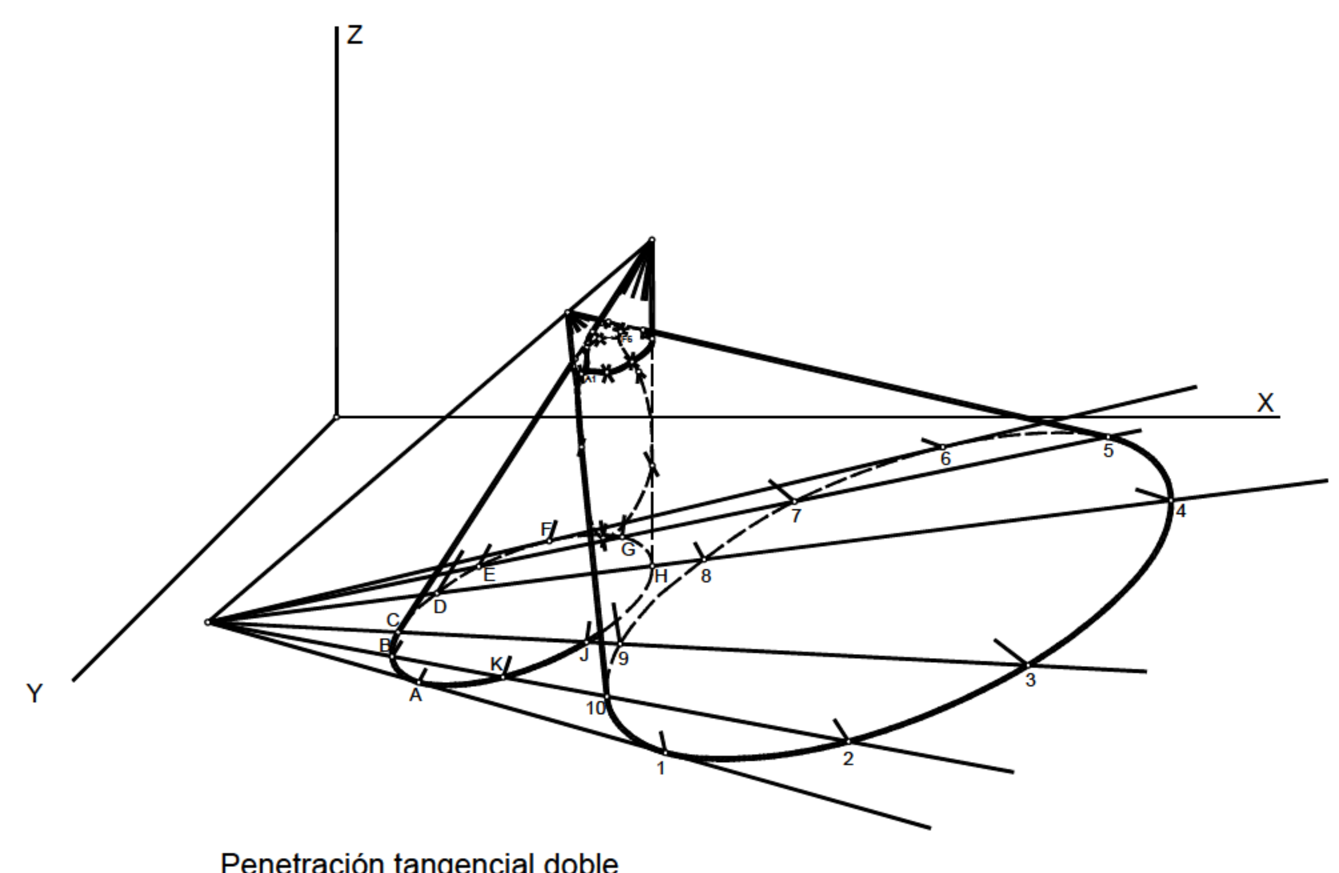
Se trata de una superficie de vértice impropio y otra de vértice propio. Los planos auxiliares deberán pasar por el vértice V del cono y ser paralelos a las generatrices del cilindro. Por ser uno de los planos límites tangente a ambas superficies, la penetración producida será “Tangencial simple”.



Penetración tangencial simple
6F-5E-4D-3C-2B-1A-10L-9K-8J-7H-6G-
5H-4J-3K-2L-1A-10B-9C-8D-7E-6F

*.- Intersección de dos conos. Penetración tangencial doble.

Se trata de dos superficies de vértice propio; los auxiliares pasarán por los vértices (V_1, V_2) de ambas superficies. Por ser los planos límites tangentes a ambas superficies la intersección producida se denomina “Penetración tangencial doble”:



Penetración tangencial doble
F6-G5-H4-J3-K2-A1-K10-J9-H8-G7-F6
F6-E5-D4-C3-B2-A1-B10-C9-D8-E7-F6

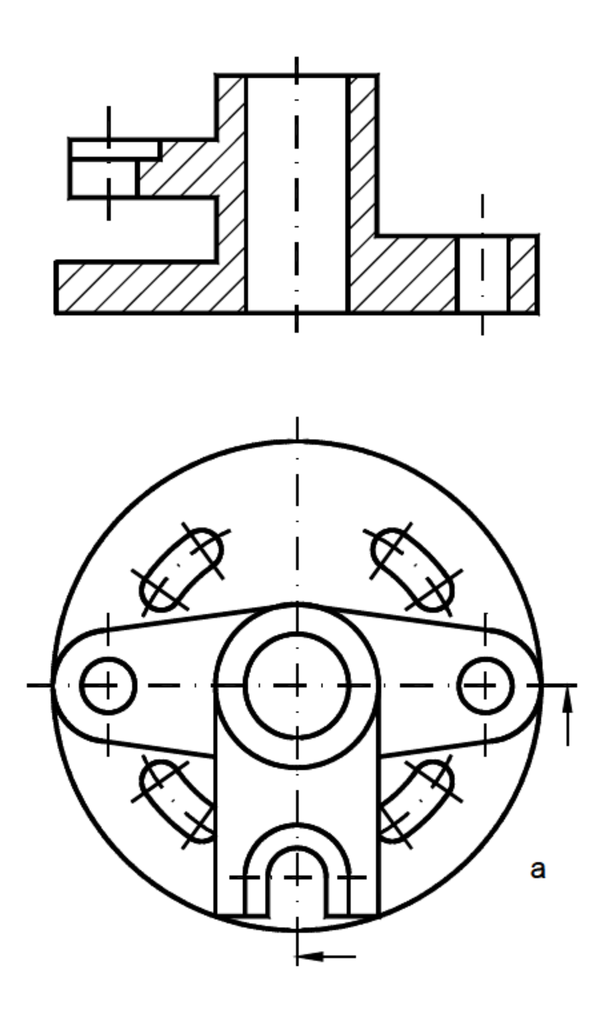
16. APLICACIONES DEL S. DE P. CABALLERA AL DIBUJO INDUSTRIAL

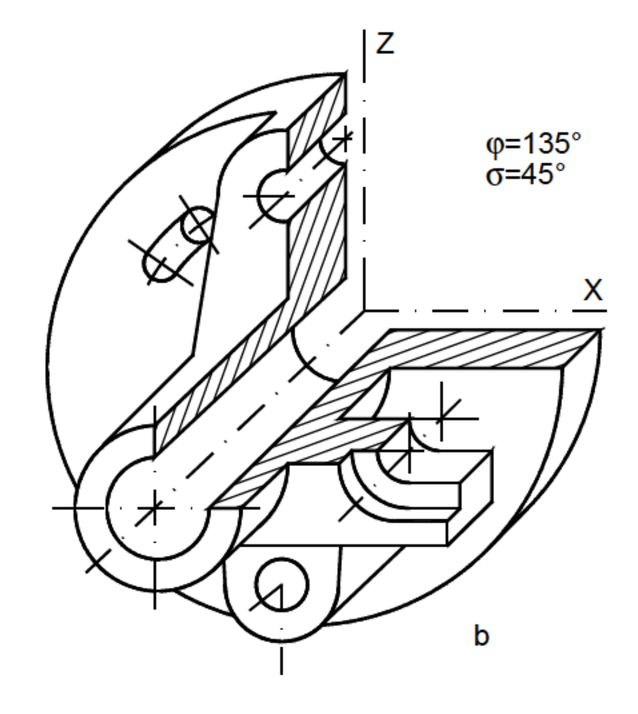
Aplicación directa de la perspectiva caballera en el dibujo industrial: en el trazado de croquis y esquemas, representación de toda clase de detalles mecánicos o estructurales que en proyecciones diédricas quedan poco claras.

Se emplea también en ilustraciones técnicas, catálogos, dibujos para patentes, esquemas de distribución, esquemas para instalaciones eléctricas y conducciones entubadas, etc...

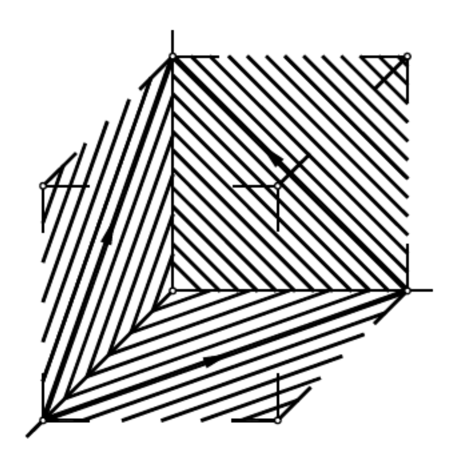
Muy útiles son también los despieces de un conjunto, según las llamadas “perspectivas de explosión”, pues permiten ver las piezas por separado según la posición relativa de montaje.

En general todo lo dicho a este respecto sobre la aplicación del Sistema Axonométrico, son válidas para el Sistema de Caballera. Los criterios a tener en cuenta son idénticos y la forma de ejecución queda reflejada en las figuras siguientes.

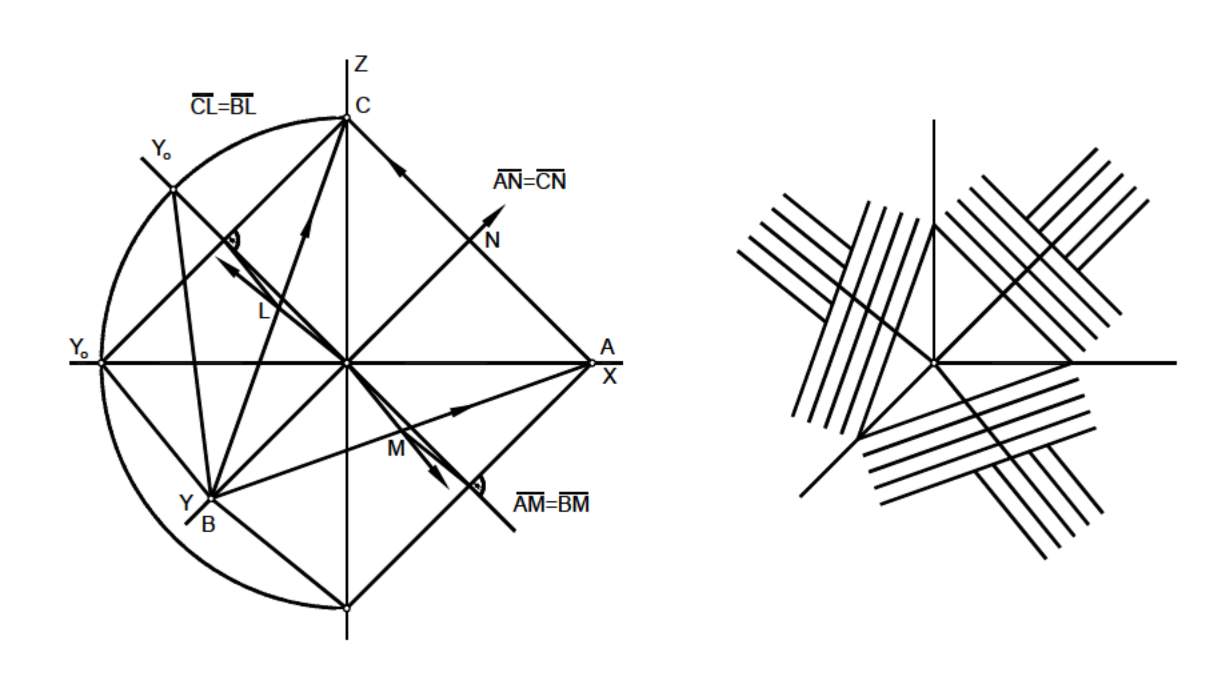




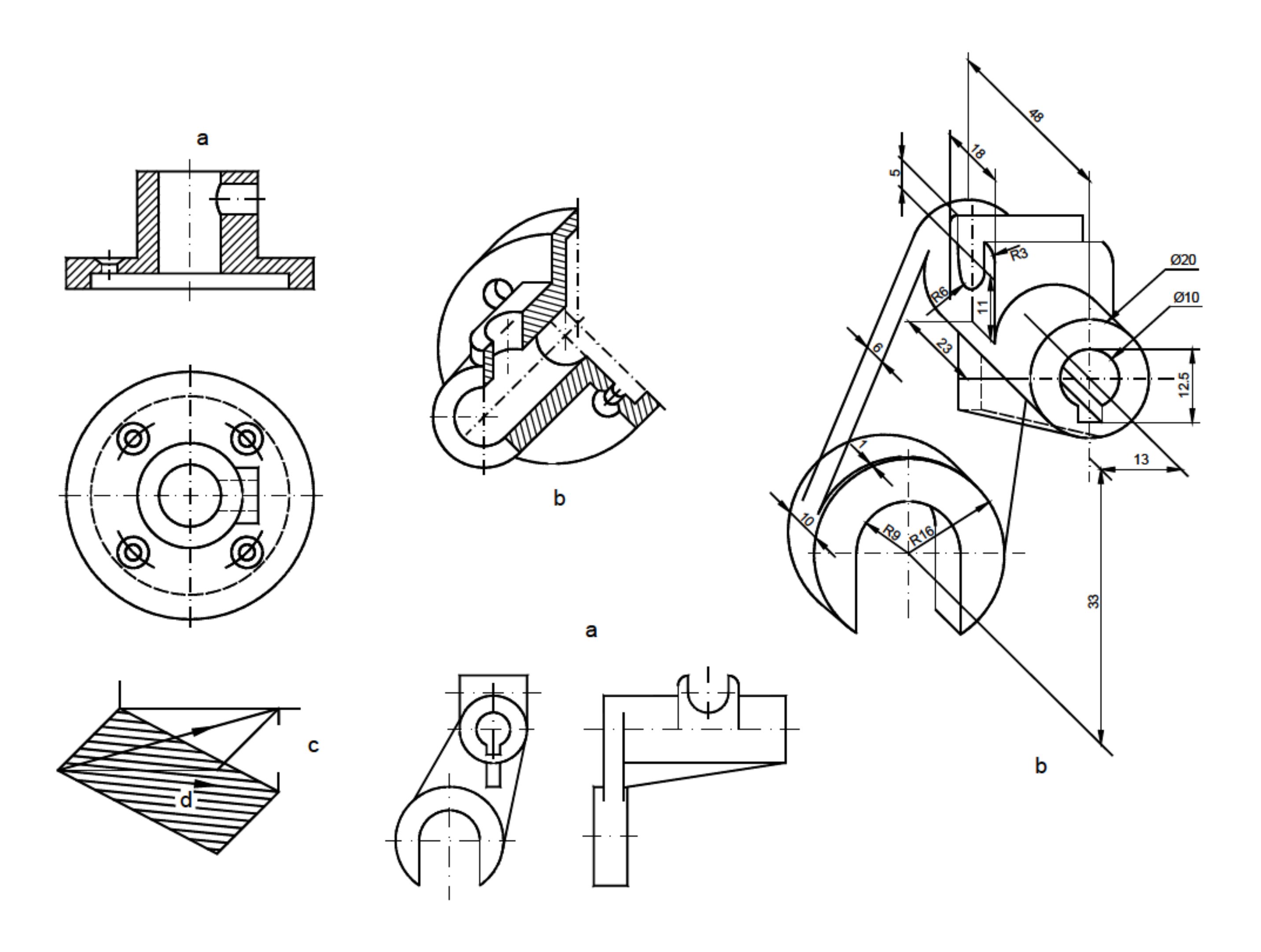
Cuando se realice un corte o se produzca una sección y se represente en perspectiva caballera, las líneas de rayado de cada plano son paralelas a las direcciones marcadas en la figura, que coinciden con las diagonales de las caras del cubo, situadas sobre los planos de proyección. La arista situada sobre el eje Y aparecería afectada de la reducción correspondiente.



ORIENTACIÓN DEL RAYADO DE SECCIONES
DE PIEZAS ENSAMBLADAS



Cuando la parte seccionada no se encuentra en posición paralela a alguno de los planos de proyección, en la figura, se determina la dirección en la que tendremos que practicar el rayado (d).



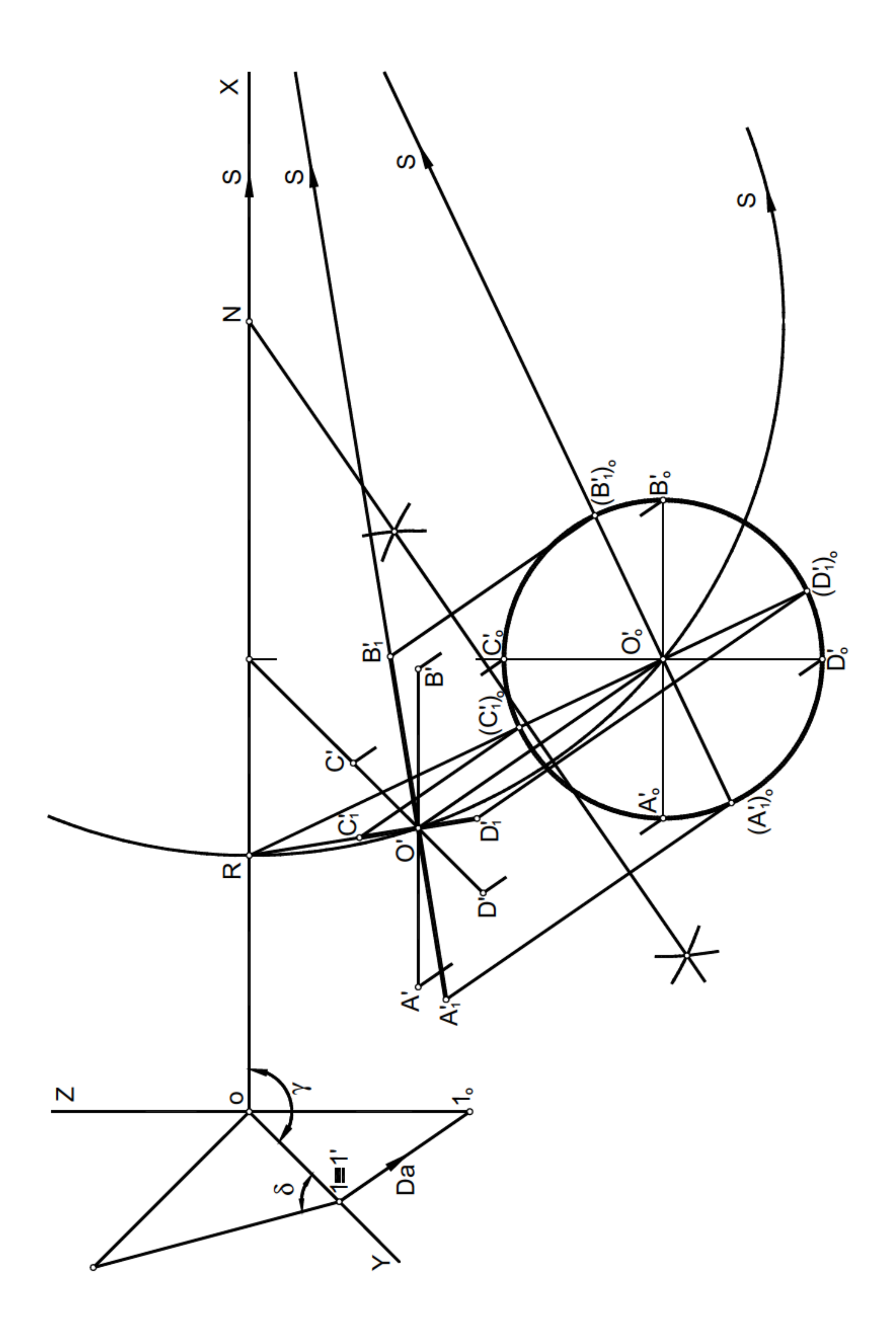
Para que el acotado de piezas representadas en la Perspectiva Caballera sea el adecuado, las líneas de referencia y cota serán paralelas a los ejes, adaptándose la rotulación a la deformación perspectiva.

17. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dado el radio de una circunferencia situada en el plano de proyección XOY, determinar los ejes de la proyección correspondiente.

Una vez definido el sistema de P.C. mediante los ángulos y se obtiene la dirección de afinidad D_a, entre la proyección horizontal de un punto (1') y su abatimiento (1_o). Se supone el plano XOY abatido sobre el cuadro, se dibuja la circunferencia de centro O'_o y se desabate según O'. Los elementos de la afinidad existente entre las figuras situadas sobre el plano (XOY), y sus correspondientes abatimientos sobre el plano del cuadro, son: eje de afinidad, el eje X; dirección de afinidad, D_a; pareja de puntos afines, O' y O'_o. Los dos diámetros de la circunferencia $\overline{A'_oB'_o}$ y $\overline{C'_oD'_o}$ paralelo y perpendicular, al eje de afinidad, dan, al ser desabatidos, dos diámetros conjugados de la elipse afín $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$. Para obtener los ejes de la elipse se une O' con O'_o y se halla la mediatriz de este segmento, que corta en N al eje de afinidad; con centro en N circunferencia que pasa por O' y O'_o y corta al eje de afinidad en R y S. Al unir R y S con O'_o se obtienen sobre la circunferencia $(A'_1)_o$, $(B'_1)_o$ y $(C'_1)_o$, $(D'_1)_o$; uniendo R y S con O' se obtienen las direcciones de los ejes de la elipse y al desabatir, los puntos A'_1, B'_1 y C'_1, D'_1 que son sus extremos.

Los fundamentos de los trazados aquí realizados, los podrá encontrar el interesado en el tratado de “Aplicaciones de la Homología y la Afinidad en los Sistemas de Representación” del mismo autor.

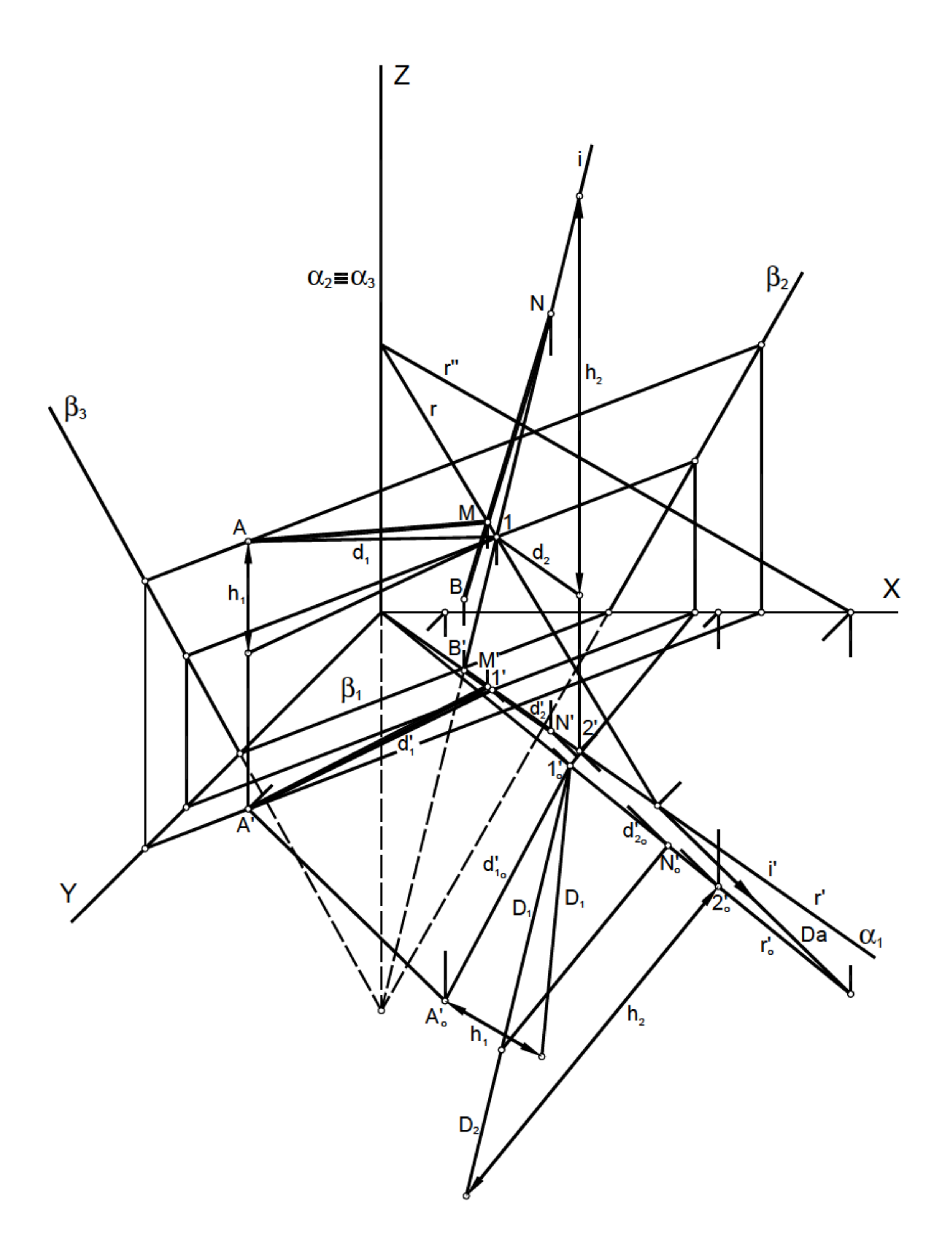

X
S
S
S
S
N
(B'1)o
B'o
(D'1)o
B'1
B'
C'o
O'o
D'o
(C'1)o
C'
C'1
A'o
(A'1)o
D'1
O'
R
D'
A'
A'1
Z
o
γ
1o
δ
1≡1'
Da
Y

2. Dados los puntos A y B y la recta r determinar en dicha recta un punto cuya suma de distancias a los puntos dados sea mínima.

Se determinan las trazas del plano α definido por el punto B y la recta r. Por el punto A se traza el plano β perpendicular a la recta r, la intersección de α con β, es la recta i(i') y con r el punto 1(1').

Se determina la magnitud D_1 del segmento $\overline{A1}$, siendo h_1 la diferencia de cotas entre sus puntos extremos. Es preciso seguidamente girar el punto A llevándolo sobre la recta i(i'), de forma que quede opuesto al punto B, para ello se determina sobre la recta i(i'), la distancia $D_2=\overline{12}$, cuya diferencia de cotas entre extremos es h_2. Sobre D_2 se lleva D_1, obteniendo al desabatir, el punto N que corresponde al punto A girado.

Los puntos B y N se encuentran en el mismo plano α que r, y por tanto, pueden unirse mediante una recta, que determina sobre r el punto M buscado. El camino más corto entre los puntos es el definido por A-M-B.

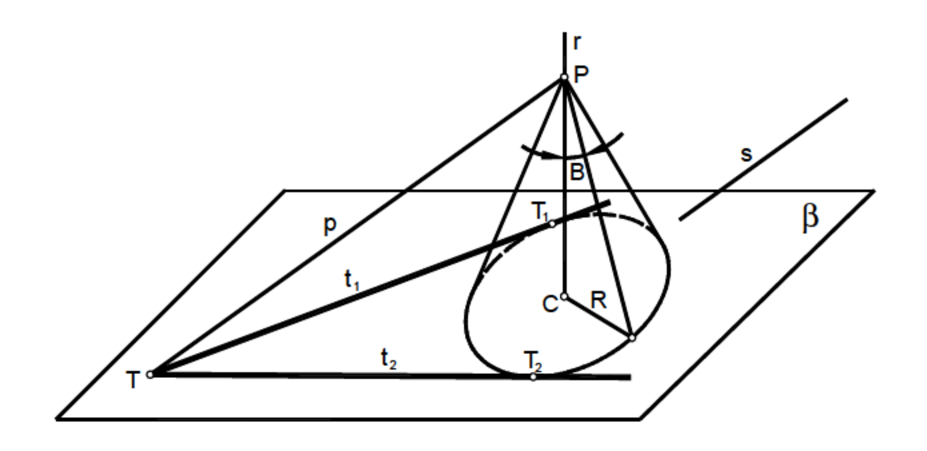

Z
i
$\alpha_2 \equiv \alpha_3$
N
β_2
r''
h_2
β_3
r
M
1
A
d_1
d_2
h_1
B
X
B'
M'
1'
β_1
d'_2
N'
2'
d'_1
$1'_o$
A'
d'_{2o}
N'_o
i'
Y
d'_{1o}
D_1
D_1
r'
$2'_o$
Da
α_1
r'_o
A'_o
h_1
h_2
D_2

3. Determinar los planos que siendo paralelos a una recta oblicua conocida s, forman con otra r también conocida y oblicua, un ángulo dado $\hat{B}$.

Por un punto C de la recta r, se hace pasar un plano β perpendicular a la recta. Tomamos el punto P de la recta r, que será vértice de un cono cuyo semiángulo en P es el valor $\hat{B}$.

En figura aparte se halla el radio de la base R, teniendo en cuenta que la altura del cono es la verdadera magnitud de $\overline{PC}$. Se abate C, tomando como charnela la traza β_2, obteniendo C_o y por lo tanto la dirección de afinidad. Se dibuja la circunferencia correspondiente a la base del cono.

El punto T_o, abatimiento de T, punto de intersección con el plano β, de la recta p, paralela a la s, y que pasa por el vértice P del cono. Desde T_o se trazan las tangencias $(t_1)_o$ y $(t_2)_o$ a la circunferencia y mediante la afinidad se desabaten según t_1 y t_2. Los planos solución, quedan definidos por las rectas p y t_1, uno de ellos, p y t_2, el otro.

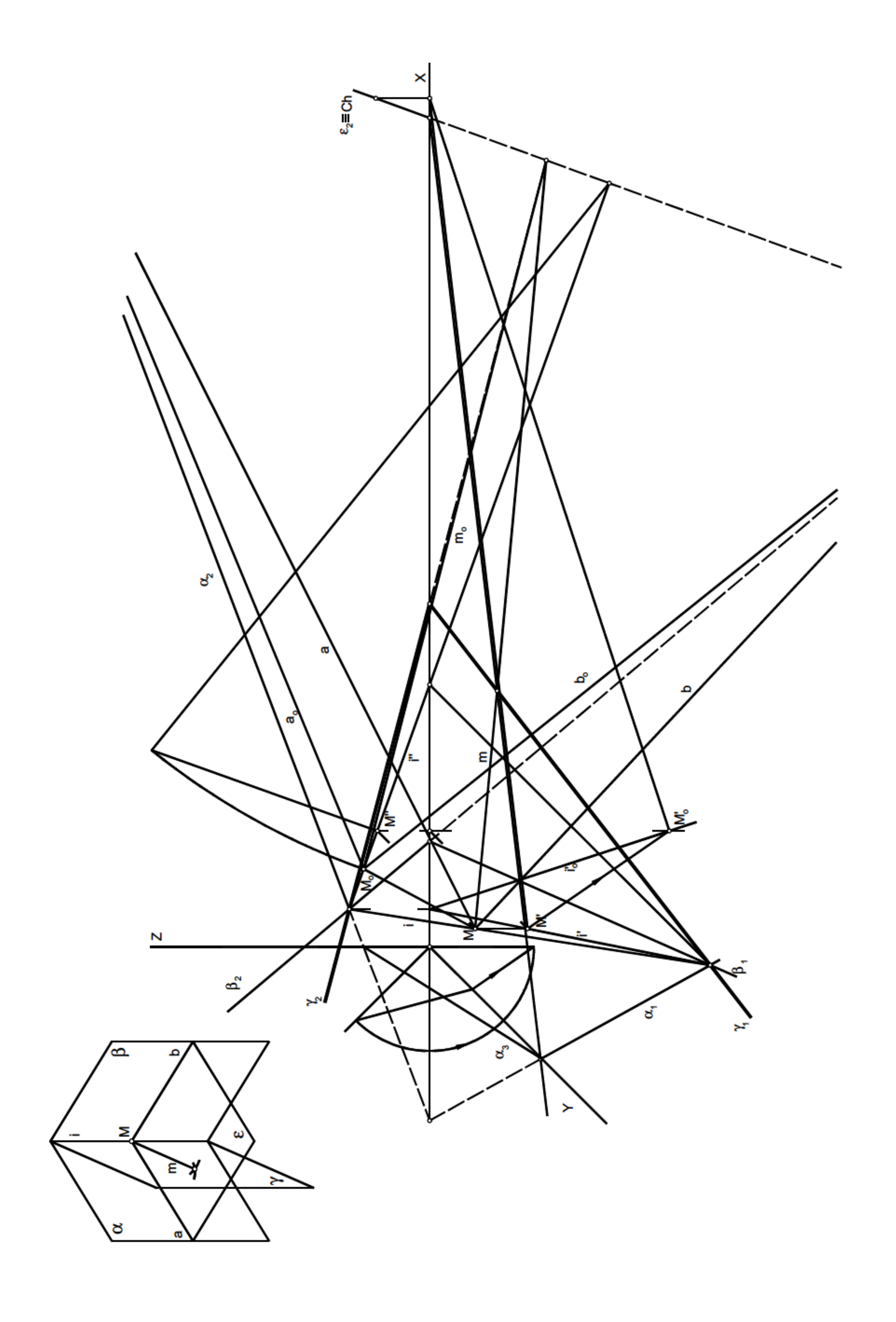

r
P
s
B
T_1
β
p
t_1
C
R
T
t_2
T_2

4. Dados dos planos oblicuos, determinar el plano bisector del diedro que dichos planos forman.

Sean los planos oblicuos α y β que se cortan según la recta i(i'), por un punto M de la recta i(i') se hace pasar un plano ε perpendicular a la recta.

Se determinan las rectas a y b de intersección de ε con α y β respectivamente; como ambas pasan por M(M'), éste dato nos ayuda en su determinación. Se abaten las rectas anteriores, tomando como charnela la traza ε_2, y en el abatimiento se obtiene la bisectriz del ángulo que forman, recta m.

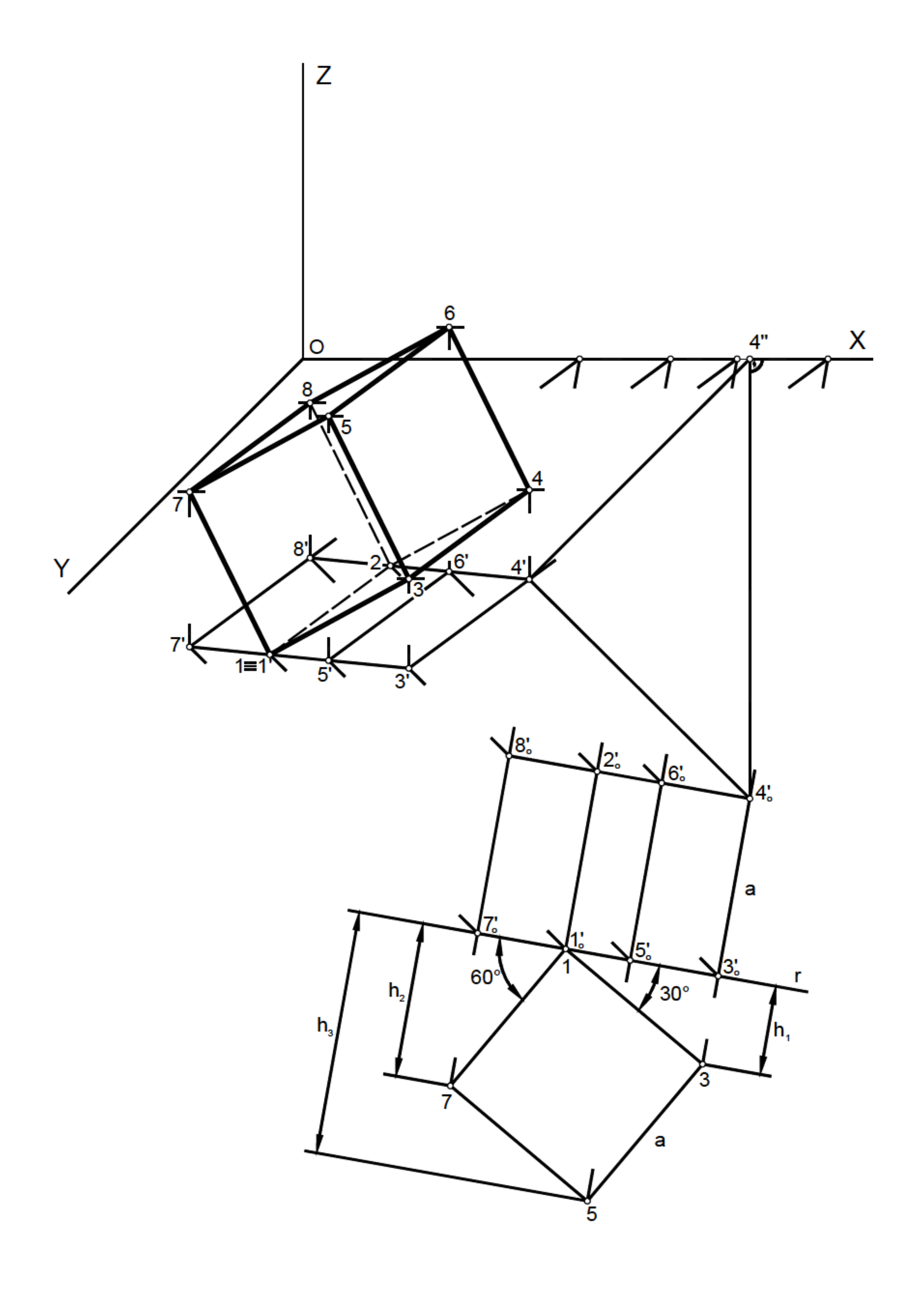
El plano γ bisector del diedro que determinan los planos, queda determinado por la recta -m- y la intersección -i- de ambos planos.


X
Y
Z
ε2≡Ch
α2
α1
α3
β2
β1
γ2
γ1
a
a0
b
b0
m0
m
i
i"
M
M0
α
β
γ
ε

5. Determinar el cubo que teniendo una arista en el plano de proyección XOY, las caras del poliedro que concurren en dicha arista forman ángulos diferentes con dicho plano de proyección.

Supongamos que las caras a las que se refiere el enunciado del problema, forman ángulos respectivos de 30° y 60° con el de proyección XOY. Abatiremos XOY sobre el cuadro y en dicho abatimiento dibujamos la cara 1, 3, 5, 7 y una recta auxiliar r formando los ángulos de 3O° y 60° con los lados correspondientes de la cara. Por los vértices de la cara dibujada, se trazan perpendiculares a la recta, r (charnela), obteniéndose sobre ella, los puntos $3'_o$ $5'_o$ $7'_o$; y sobre las perpendiculares trazadas y a la distancia -a- (arista), los $2'_o$, $4'_o$, $6'_o$, $8'_o$. Queda por tanto definida, la proyección del poliedro sobre el plano XOY abatido.

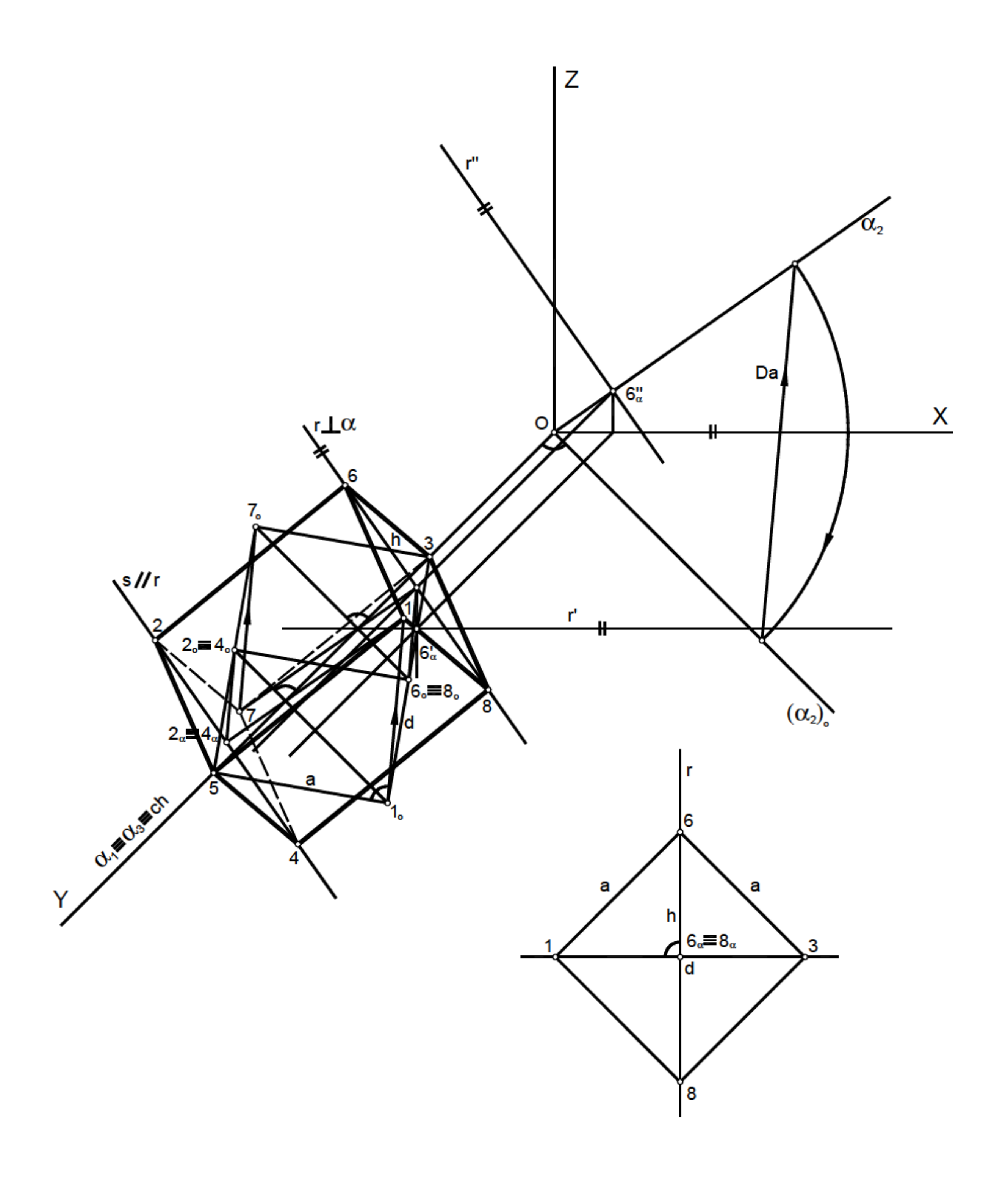
Teniendo en cuenta la afinidad existente, obtendremos la figura de vértices 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', proyección horizontal del poliedro. Su proyección directa se obtendrá, teniendo en cuenta las cotas h_1, h_2 y h_3 de las parejas de vértices correspondientes.


Z
O
X
Y
6
8
5
7
4
4"
8'
2
6'
4'
3
7'
1≡1'
5'
3'
8'₀
2'₀
6'₀
4'₀
a
7'₀
1'₀
1
5'₀
3'₀
r
60°
30°
h₂
h₃
h₁
7
3
a
5

6. Representar un cubo sabiendo que tiene su diagonal situada sobre el eje del sistema Y; el ángulo σ=45°.

Se considera el plano α que va a contener a los vértices 1, 3, 5 y 7. Se halla la dirección de afinidad, D_a, del abatimiento, se dibuja en el abatimiento el rectángulo 3-7_o-5-1_o, cuyos lados son las aristas y la diagonal de una cara respectivamente, siendo la diagonal 3-5 del mismo, diagonal del cubo. Trazando por los puntos 1_o y 7_o las perpendiculares a la diagonal (o dividiendo la diagonal en tres partes iguales) se obtienen sobre el rectángulo los puntos 2_o-4_o y 6_o-8_o, que se corresponden con el abatimiento de las proyecciones de los vértices correspondientes del poliedro sobre el plano α.

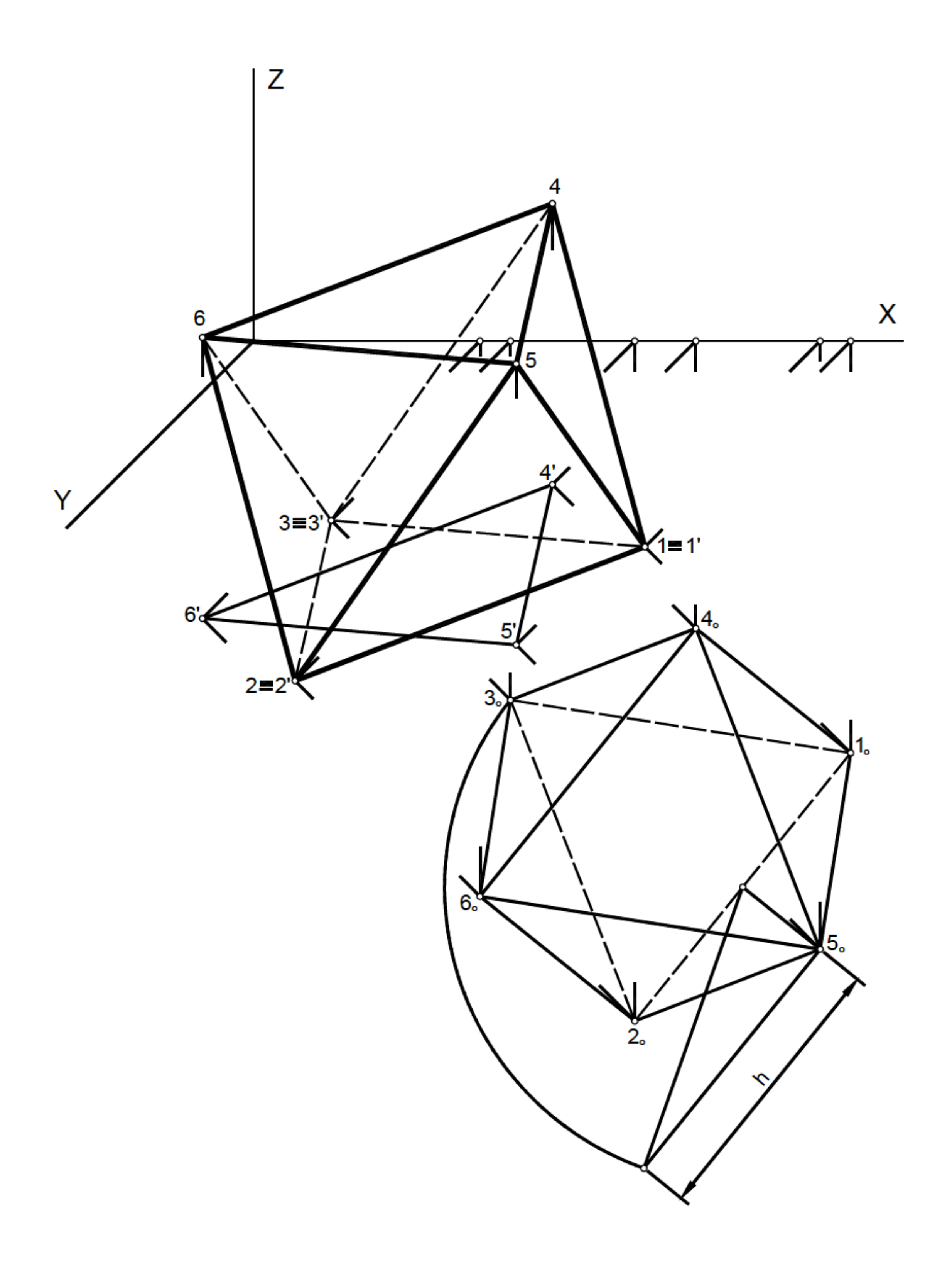
Se desabaten todos los puntos mediante la afinidad y teniendo en cuenta que se encuentran en rectas perpendiculares a la diagonal (eje Y), se obtienen así los puntos 7, 1, 2_α, 4_α, 6_α y 8_α, se traza por el punto 6(6') la recta r(r') perpendicular a α y sobre ella se lleva la distancia h, a la que se encuentra dicho punto de α. Se obtienen los restantes puntos y se unen ordenadamente.


Z
r''
α2
Da
6''α
O
X
r⊥α
6
7o
h
3
s//r
2
1
r'
2o≡4o
6'α
6o≡8o
8
7
(α2)o
2α≡4α
d
5
a
1o
α1≡α3≡ch
4
Y
r
6
a
a
h
1
6α≡8α
3
d
8

7. Hallar las proyecciones de un octaedro que tiene una de sus caras situada en el plano XOY.

Se supone abatido el plano XOY sobre el plano del cuadro, en dicho abatimiento se dibuja la proyección del octaedro, con una cara apoyada, la 1-2-3. Se calcula la altura h a la que está situada la cara 4-5-6 respecto de la anterior. Se desabaten los puntos usando la afinidad existente, obteniendo 1', 2', 3', 4', 5' y 6'. Los vértices 1, 2 y 3 por encontrarse sobre el plano coinciden con sus proyecciones.

Los puntos 4, 5 y 6 los determinaremos sobre perpendiculares al plano XOY, trazadas por sus proyecciones, y a la distancia h de ellas, después uniremos ordenadamente, teniendo en cuenta la visibilidad o no de las aristas.

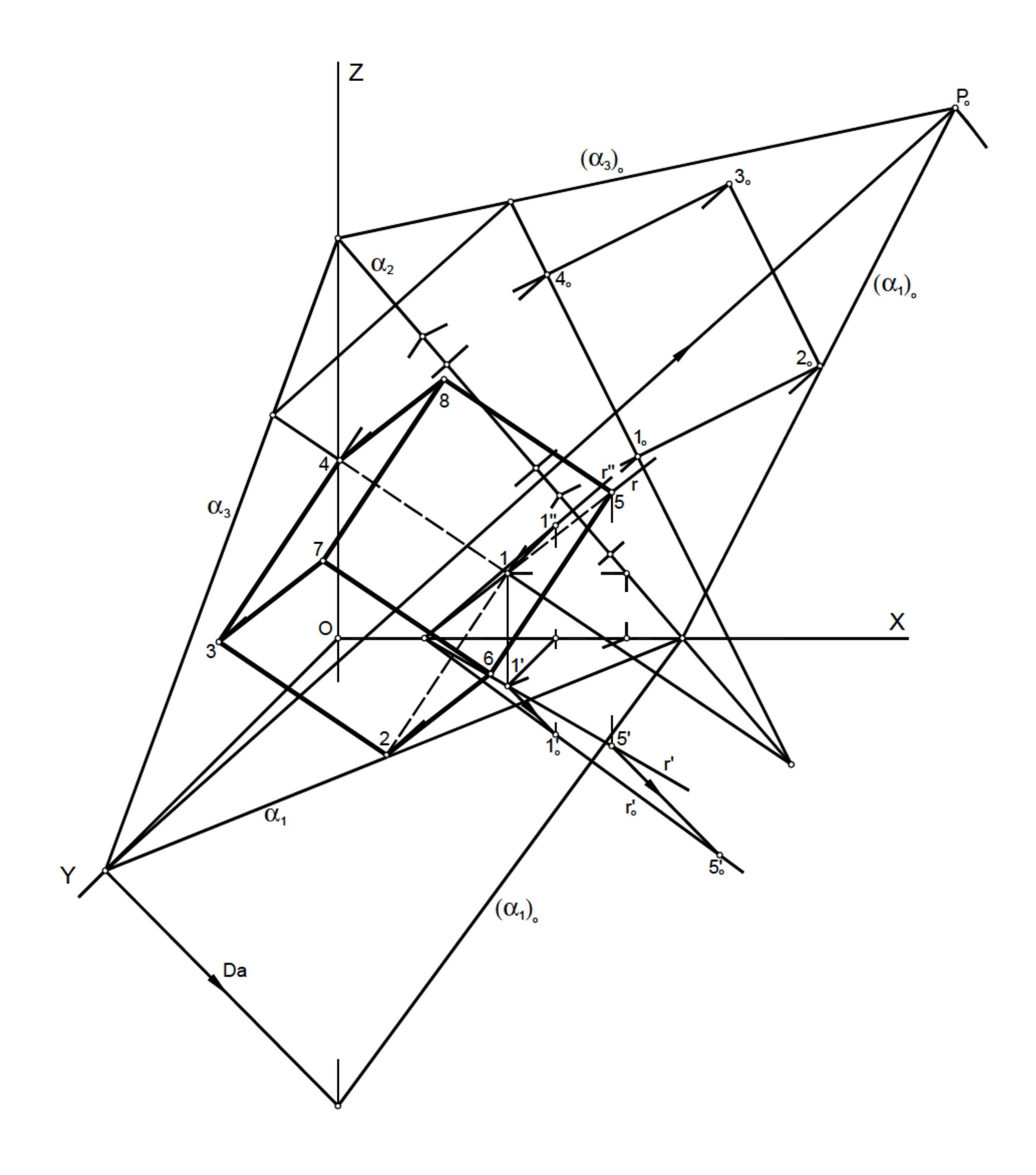

Z
4
X
6
5
Y
4'
3≡3'
1≡1'
6'
5'
4o
2≡2'
3o
1o
6o
5o
2o
h

8. Determinar el cubo que tiene una de sus caras situada sobre un plano oblicuo conocido.

El plano sobre el que está la cara, del cubo es el plano α, se abate éste sobre el cuadro, obteniéndose la verdadera magnitud del triángulo de trazas.

Se dibuja la cara, 1_o-2_o-3_o-4_o y se desabaten los puntos según 1, 2, 3 y 4. Los otros cuatro vértices están sobre perpendiculares al plano, trazadas por los puntos anteriores. Por el punto $1'_o$ se traza la recta r'_o y sobre ella se lleva, la, longitud de una arista, al desabatir la recta se obtiene el punto 5.

El resto de puntos se consigue de forma inmediata, y uniéndolos adecuadamente queda determinada la proyección directa, del poliedro.


Z
P₀
(α₃)₀
3₀
α₂
4₀
(α₁)₀
2₀
8
1₀
4
r''
r
5
α₃
1''
7
1
O
X
3
6
1'
2
1'₀
5'
r'
r'₀
α₁
5'₀
Y
(α₁)₀
Da

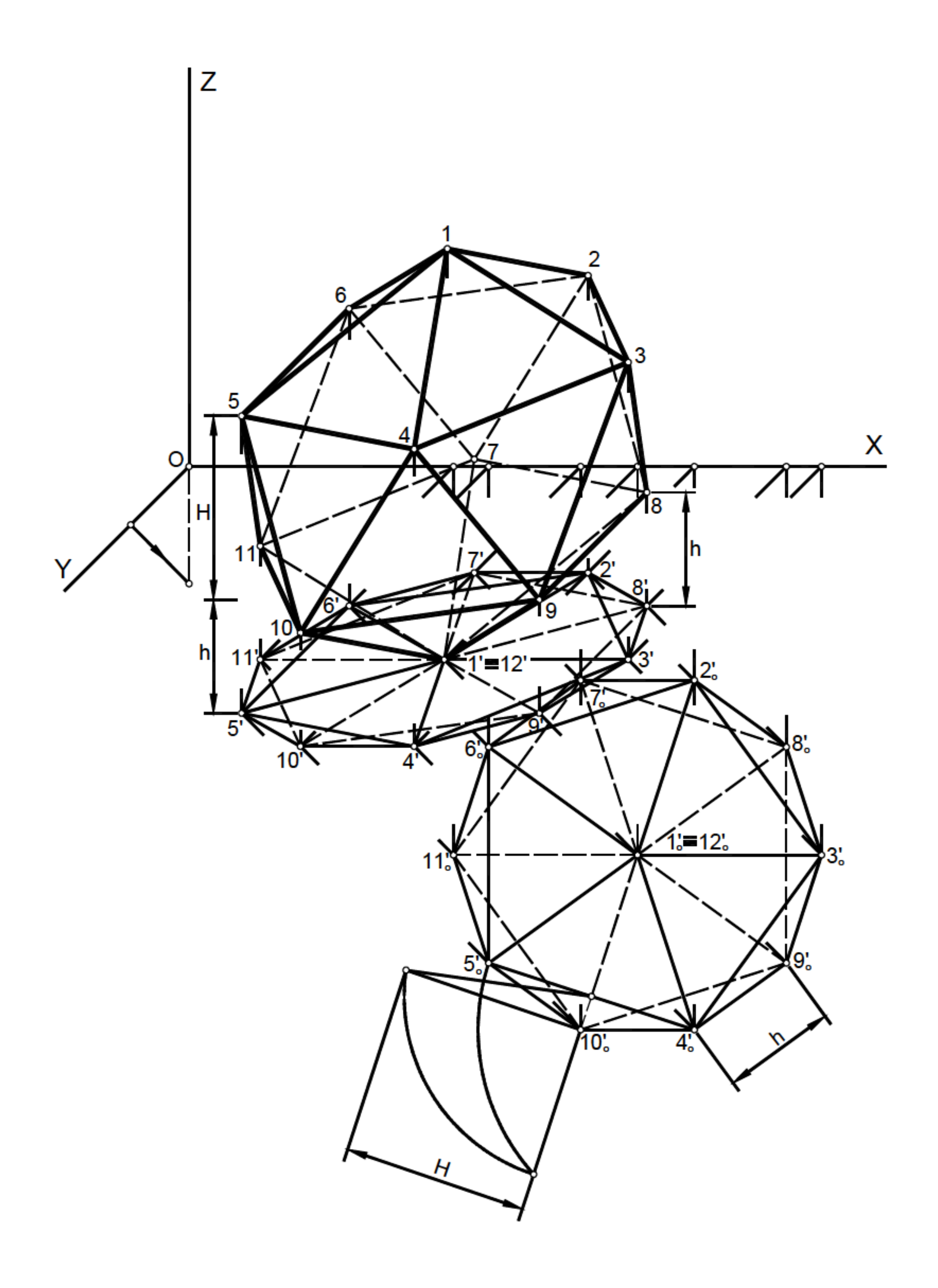
9. En un sistema de perspectiva caballera, determinar la proyección directa de un icosaedro de arista conocida, estando situado de forma que una diagonal es vertical.

Se supone abatido el plano XOY sobre el plano del cuadro, en el abatimiento se dibuja la proyección del icosaedro sobre dicho plano, supuesto el poliedro en posición tal, que la diagonal 1-12 le es perpendicular. Se halla la altura h, a la que se sitúan los puntos 7, 8, 9, 10 y 11 respecto del plano XOY suponiendo el vértice 12 sobre él; los vértices 3, 4, 5 y 6 están a una distancia h+H del plano de referencia; el vértice 1 se sitúa a una distancia h+h+H de dicho plano, estas distancias se hallan fácilmente según se explica en otras secciones de éste libro.

Para pasar a perspectiva, se desabaten los puntos utilizando la afinidad existente, obteniendo así 1', 2', 3', 4', ..

El vértice 12 está realmente en XOY y por ello coincide con 12'. El resto de los puntos están sobre perpendiculares trazadas desde sus proyecciones sobre el XOY y a las alturas antes referidas.

Obteniendo los vértices se unirán ordenadamente, teniendo en cuenta las partes vistas y ocultas.

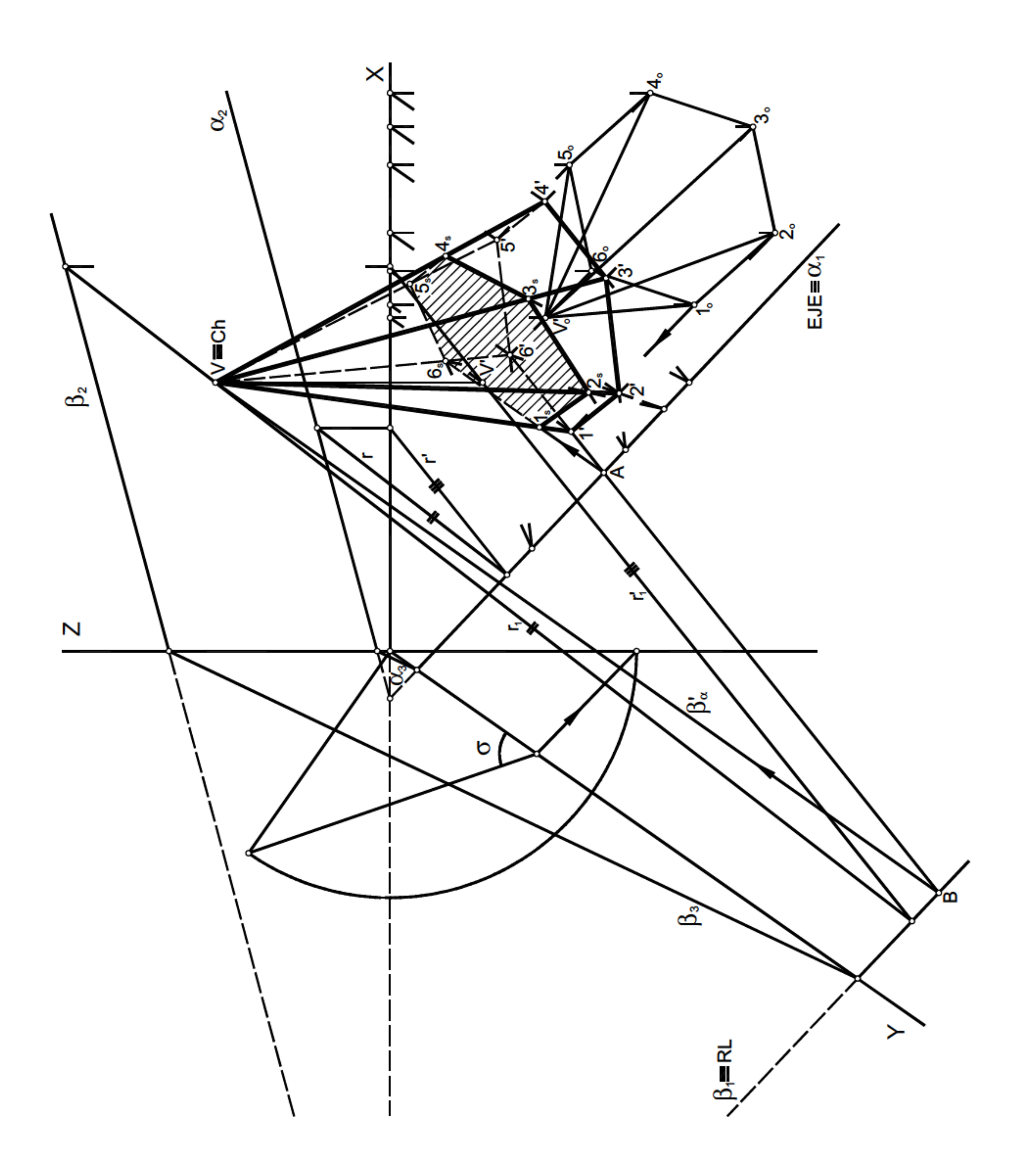

Z
X
Y
O
H
h
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
1'≡12'
2'
3'
4'
5'
6'
7'
8'
9'
10'
11'
1'o≡12'o
2'o
3'o
4'o
5'o
6'o
7'o
8'o
9'o
10'o
11'o
H
h

10. Una pirámide oblicua cuya base es un hexágono regular, está apoyada en el plano XOY, determinar la sección que le produce un plano oblicuo conocido. Se resolverá por Homología.

Para, obtener la pirámide apoyada sobre el plano de proyección XOY, se supone abatido el plano y en él, se construye el hexágono de la base 1_o, 2_o, 3_o, 4_o, 5_o y 6_o y la proyección de la pirámide sobre dicho plano de vértice V'_o.

Se desabate el conjunto, por afinidad, de eje X y dirección indicada; obteniendo los puntos 1', 2', 3', 4', 5' y 6' y la proyección V' del vértice, por V' se levanta una perpendicular a XOY y sobre ella se sitúa V. Sea el plano α el secante, la sección que produce en la pirámide es homóloga de la base, siendo los elementos de la homología los siguientes: el centro de homología, la proyección directa V del vértice; el eje de homología, la traza α_1 del plano secante; la recta límite, la traza β_1 del plano paralelo al secante que pasa por el vértice V de la pirámide. Para resolverla por el punto 1' se traza una recta cualquiera que corte al eje en el punto A y a la recta límite en el punto B, unido este punto con V, centro de homología se determina la dirección del infinito de su homólogo B'_α, la paralela a esta dirección trazada desde A≡A' corta a la arista V1 en el punto 1_s, punto de la sección.

Los demás puntos de la sección son inmediatos, se obtienen apoyándose en la pareja de puntos homólogos (1_s-1').

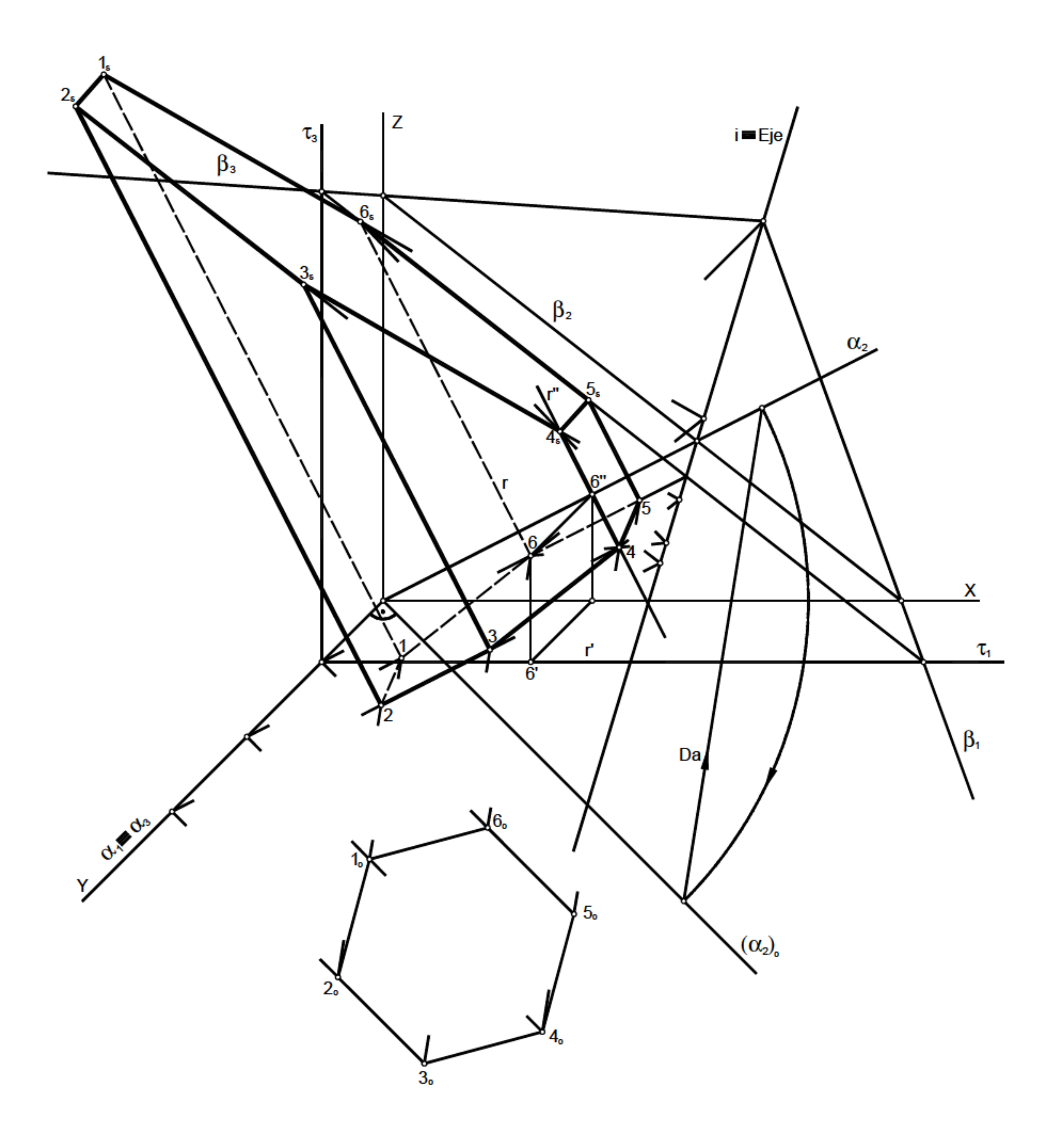

X
Z
Y
α2
β2
V≡Ch
EJE≡α1
A
B
r
r'
r1
β'α
σ
β3
β1≡RL
α3
1o
2o
3o
4o
5o
6o
1s
2s
3s
4s
5s
6s
1'
2'
3'
4'
5'
6'
V'o
V'

11. Un prisma recto tiene su base, un hexágono regular, en un plano que contiene al eje Y, se le secciona por un plano oblicuo conocido. Se pide: dibujar el tramo comprendido entre los dos planos citados.

Se abate α alrededor del eje Y, por lo que $(\alpha_2)_o$ resulta ser perpendicular a dicho eje, siendo en éste abatimiento la dirección de afinidad D_a. Se dibuja el hexágono regular de la base en dicho abatimiento, se desabate uno de los puntos, el 6_o según 6' y después el resto de los puntos de la base. Por el punto 6 se traza la recta r perpendicular al plano α, así se obtiene la dirección de las aristas del prisma.

El plano que produce la sección es el β, definido por sus trazas, los elementos que definen la afinidad entre la sección y la base del prisma son: el eje de afinidad, la recta intersección, entre el plano α que contiene a la base y β que contiene a la sección; la dirección de afinidad es la de las aristas del prisma; la pareja de puntos (6-6_s) se obtiene hallando la intersección de la arista correspondiente con el plano β, para lo cual nos servimos del plano τ auxiliar.

El resto de puntos se obtienen, haciendo uso de la afinidad definida anteriormente.



1s
2s
τ3
Z
i ■ Eje
β3
6s
3s
β2
α2
r"
5s
4s
r
6"
5
6
4
X
1
3
r'
τ1
6'
2
Da
β1
α1 ■ α3
Y
6o
1o
5o
(α2)o
2o
4o
3o

Parte Tercera

SISTEMA DE PERSPECTIVA CÓNICA

1. CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE COMPONEN EL SISTEMA CÓNICO

* Plano perspectivo.- Zona del plano geometral que está al otro lado del punto de vista con respecto al plano del cuadro.

* Rayo principal.- Perpendicular al plano del cuadro, pasando por el punto de vista. Nos determina sobre la linea de horizonte el punto principal P, que se considera como punto de fuga principal y señala la posición del observador respecto al cuadro.

* Puntos de distancia.- Puntos D y D' que están situados en la linea de horizonte a cada lado del punto principal. La distancia. PD=PD' es igual al alejamiento del punto de vista.
respecto al cuadro.

* Plano vertical.- Plano de perfil que pasa por el punto de vista.

* Punto de fuga o punto limite.- Se denomina punto de fuga de una recta a la intersección con el plano del cuadro de la recta paralela a ella trazada por el punto de vista.

* Puntos accidentales de fuga.- Todos los de la línea de horizonte (menos el principal y los puntos de distancia).

* Puntos métricos.- Se estudian más adelante.

* Campo visual.- El espacio que abarca el observador en una sola mirada.

* Horizonte verdadero.- La línea que se ve en el infinito.

* Angulo óptico.- Angulo formado por dos visuales extremas trazadas desde el ojo del observador a los diversos puntos del objeto considerado.

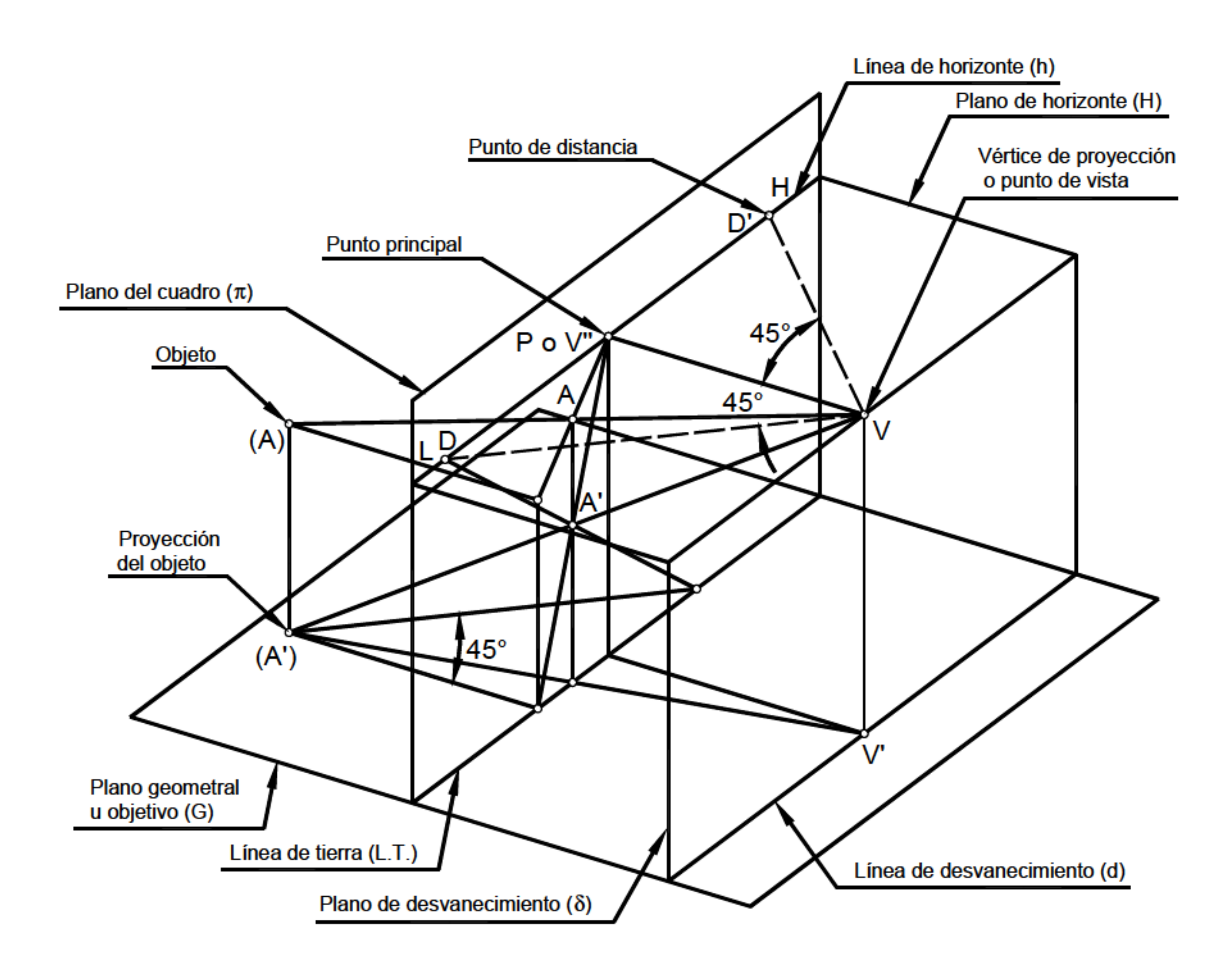
* Angulo óptico vertical.- El que forman las visuales extremas que están en el plano de perfil del punto de vista (y debe ser menor de 60 grados).

* Angulo óptico horizontal.- El que forman las visuales extremas que están en el plano de horizonte (siempre menor de 60 grados).

* Cono óptico o visual.- Conjunto de rayos visuales que parten del ojo del observador en una sola mirada y sin movimiento del mismo.

* Circulo de distancia. - Circulo trazado en el plano del cuadro con centro en P, punto principal, y radio el alejamiento del punto de vista; por ello, este circulo pasa por los puntos de distancia D y D'.

* Punto superior y punto inferior de distancia.- Los dos puntos del circulo de distancia que están en la visual del punto principal.



2. ALFABETOS

2.1. Alfabeto del punto

Posiciones que puede ocupar el punto en el espacio respecto a los diversos planos del sistema.

*.- Puntos situados detrás del plano del cuadro (figs.1y 2).

Nomenclatura:

Línea de horizonte .... h
Plano del cuadro .... π
Plano del horizonte .... H
Plano geometral .... G
Plano de desvanecimiento .... δ

En la figura 2 podemos ver ya los puntos en el sistema cónico.

Punto A-A': Tiene la perspectiva directa por encima de h, la perspectiva de la proyección sobre el geometral está entre la h y la L.T.

Punto B-B': La perspectiva directa esté en h, la perspectiva de la proyección sobre el geometral está entre h y L.T., lo mismo que en el anterior.

Punto C-C': La perspectiva directa está entre h y L.T.

Punto D-D': Por ser un punto del plano geometral se confunden las dos perspectivas.

Punto E-E': Está este punto debajo del plano geometral. Su perspectiva directa puede estar por debajo o por encima de la L.T..

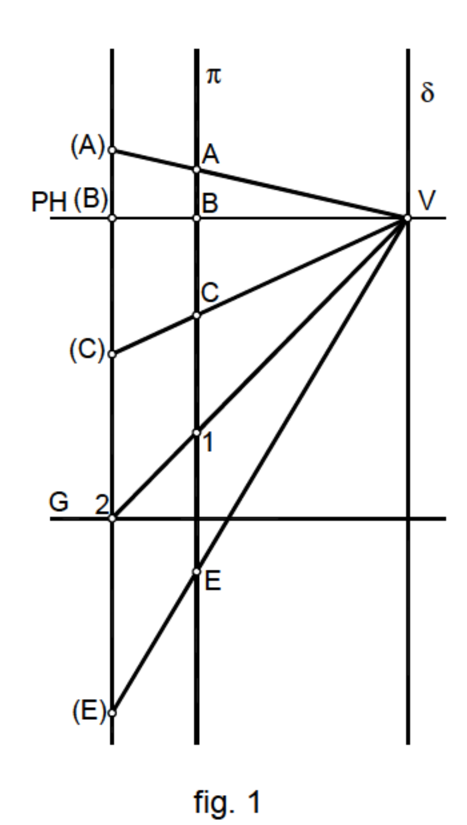


fig. 1

En 1 tenemos: D-D'-A'-B'-C'-E'
En 2 tenemos: (D)-(D')-(A')-(B')-(C')-(E')

fig. 2

*.- Puntos en el plano del cuadro.

Su perspectiva directa son ellos mismos y la perspectiva de su proyección sobre el geometral está siempre en la L.T.

*.- Puntos delante del plano del cuadro (figs.1 y 2).

Situados entre el plano del cuadro y el plano de desvanecimiento. Los puntos H, J, I, K y N tienen la perspectiva de la proyección sobre el geometral por debajo de la línea de tierra. La perspectiva directa es un punto que puede estar por encima de la h, en h, por debajo de h o por debajo de la L.T.

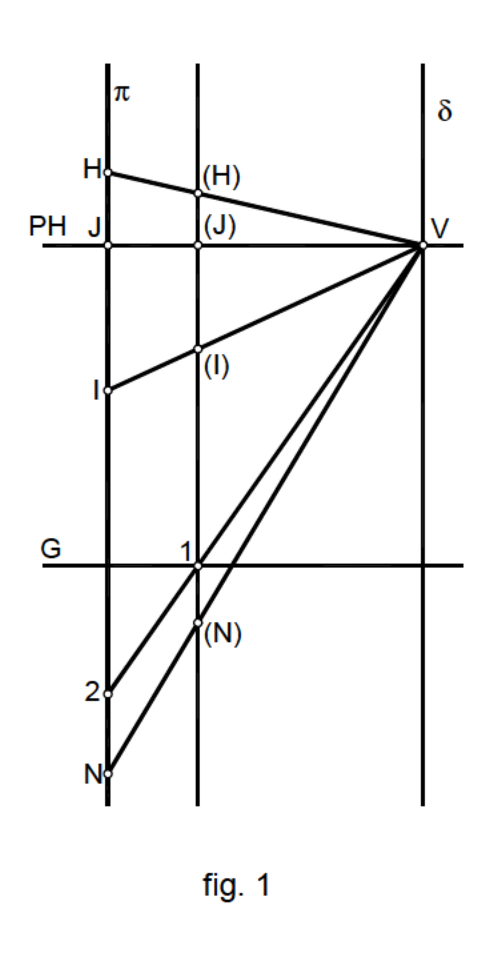


fig. 1

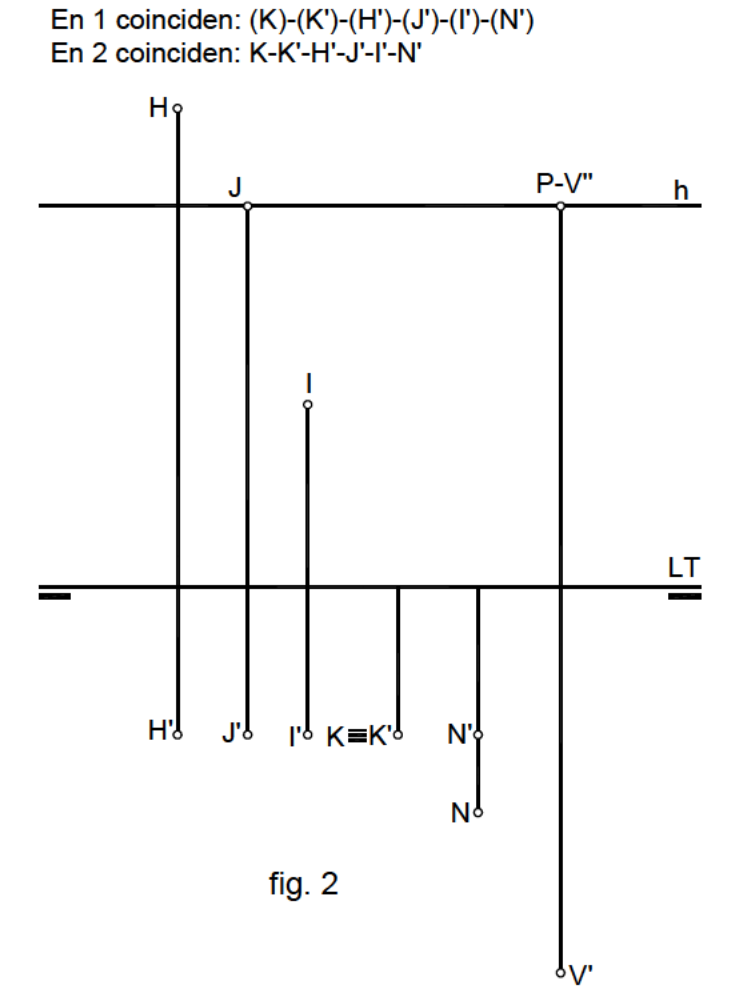


fig. 2

*.- Coordenadas del punto. Escalas.

Dado un punto (P)-(P'), y considerando el plano β que pasa por el punto de vista y forma triedro trirrectángulo con el cuadro y el geometral, vemos que el punto quedará definido por sus distancias (x), (y) y (z) a los planos β, del cuadro y geometral respectivamente.

Proyectamos el punto (P)-(P') sobre el plano del cuadro según N-M y construimos el paralelepípedo que tiene por aristas, las coordenadas del punto.

La coordenada (x)=NR=MS, si P-P' son las perspectivas del punto del espacio; trazando la paralela por P a la L.T. y limitada en P" por la recta V"S, obtenemos la perspectiva de (x), es decir, x.

Trazando la recta (P')T que forma 45° con L.T., se cumple que (y)=(y')=(P')-M. La perspectiva del segmento (y) es y=NP, ya que al ser (P)-N perpendicular al plano del cuadro su perspectiva fuga en V".

El segmento P- P' perpendicular a la L.T. es la cota (z) en la perspectiva.

Pasando al plano del cuadro trazamos por V", la traza β_c del plano de perfil y por los puntos (P) y (P') las rectas perpendiculares al plano del cuadro, cuyas perspectivas fugan en V" desde sus trazas con el cuadro N y M respectivamente.

x es la paralela por P a L.T..

y es el segmento PN, y'=P'M.

z es el segmento PP'.

Las verdaderas magnitudes se trasladan al cuadro, según:

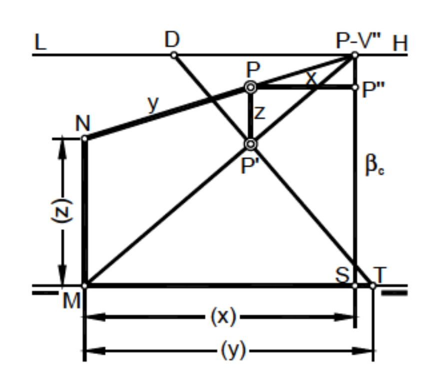
(x)=MS

(y)=MT

(z)=NM

y' se ha obtenido uniendo T con el punto de distancia D, dado que la recta (P')T forma 45° con línea de tierra.

Una vez halladas las perspectivas x, y, z, verdaderas magnitudes de las coordenadas, podremos obtener unas escalas que relacionen unas con otras, para obtener unas escalas de alturas, longitudes y profundidades que se verán en capítulos sucesivos.


L
D
P-V"
H
P
x
P"
y
N
z
P'
βc
(z)
S
T
M
(x)
(y)

2.2. Alfabeto de la recta

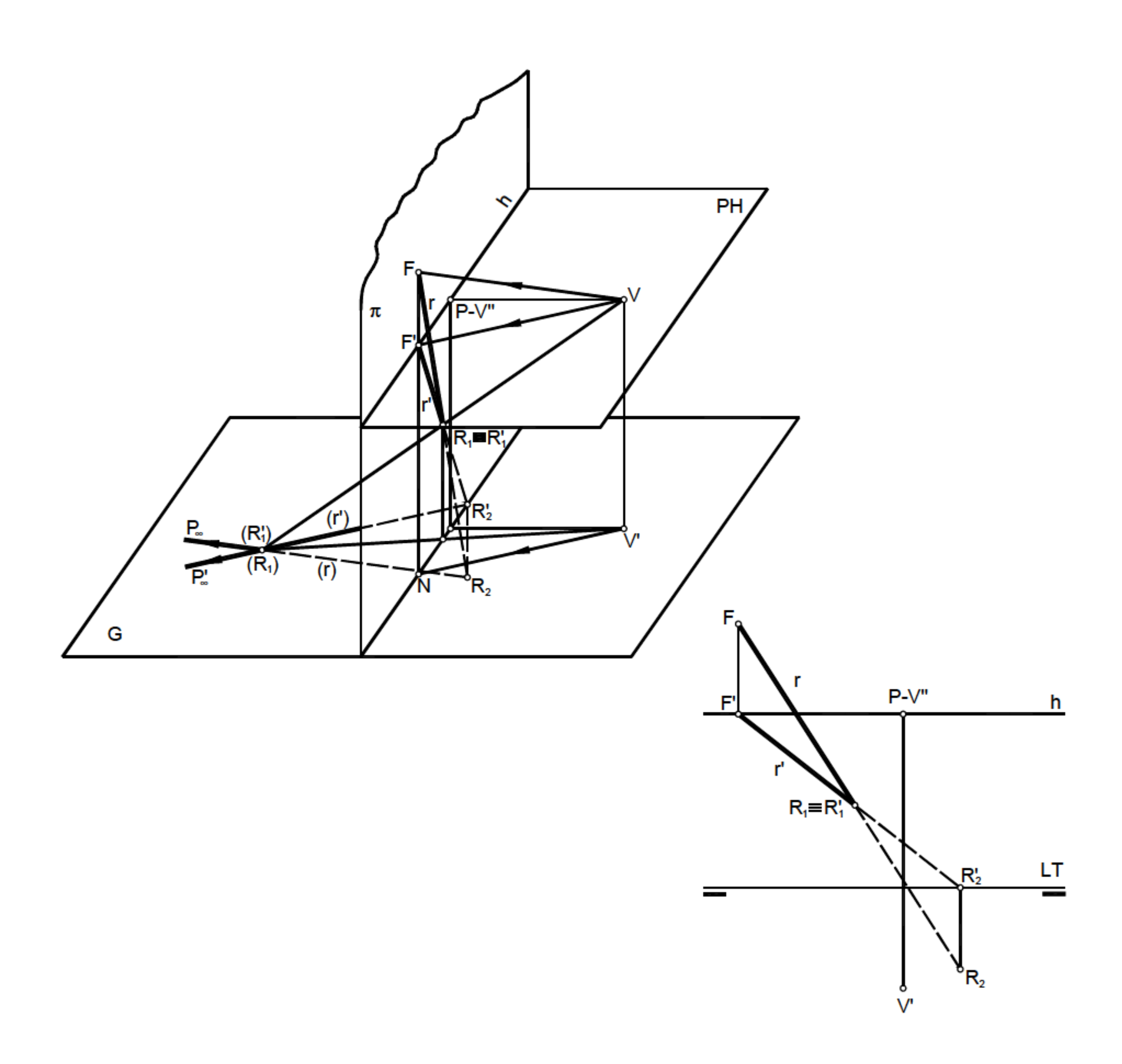
*. - Proyecciones de una recta.

Sea la recta. (r)-(r') que corta a los planos geometral y del cuadro en los puntos (R_1)-(R'_1) y R_2-R'_2, respectivamente, según la parte izquierda de la figura.

El punto R_2-R'_2 por pertenecer al plano del cuadro es de la perspectiva de la recta.

Vamos a hallar ahora el punto de fuga de la recta (perspectiva del punto del infinito de la misma $(P_\infty$-$P'_\infty)$), trazando la paralela a la recta dada, por el punto de vista V, cortará al plano del cuadro en el punto F-F'.

Uniendo F y R_2 obtenemos la perspectiva directa de la recta (r) del espacio. Proyectando (r) ortogonalmente sobre el plano geometral, tendremos otra recta (r') cuya proyección cónica se obtiene de la misma forma.

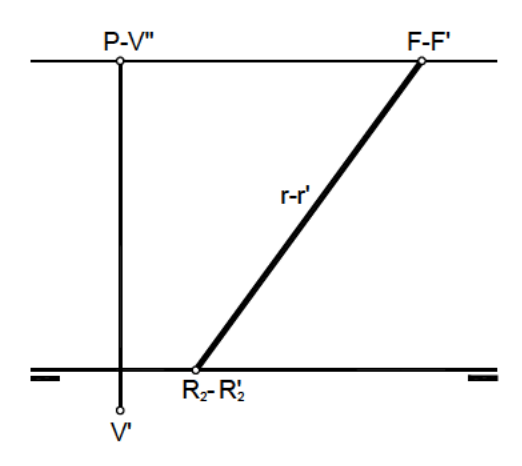


La perspectiva del punto (R_1)-(R'_1), traza de la recta con el geometral es el punto R_1-R'_1 donde se cortan las dos perspectivas.

El punto R'_2, donde la proyección de la recta sobre el geometral corta al plano del cuadro, estará siempre en la L.T. y R_2 en la perpendicular a L.T. por R'_2.

*.- Recta contenida en el plano geometral.

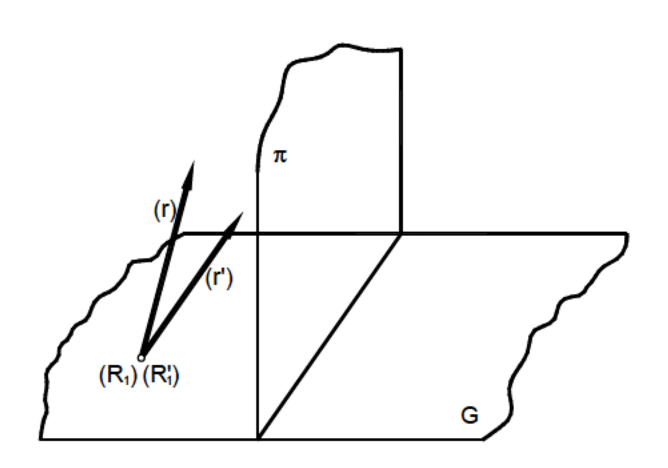
Su proyección sobre este plano se confunde con ella, r=r', siendo el punto de fuga un punto doble F- F' de h.

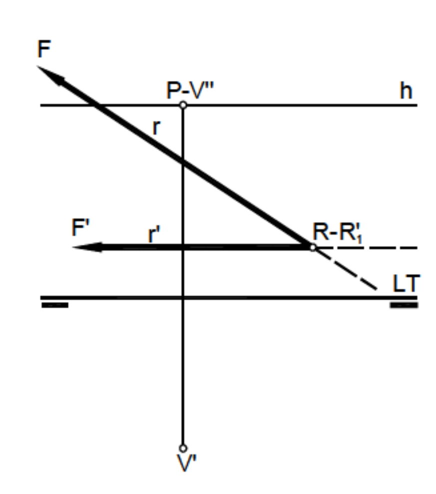


*.- Recta paralela al plano del cuadro.

Su punto de fuga está en el infinito, puesto que la paralela a ella por V no corta al plano del cuadro, de esto deducimos que la perspectiva de (r') es r' paralela a la L.T., y por lo tanto a h.

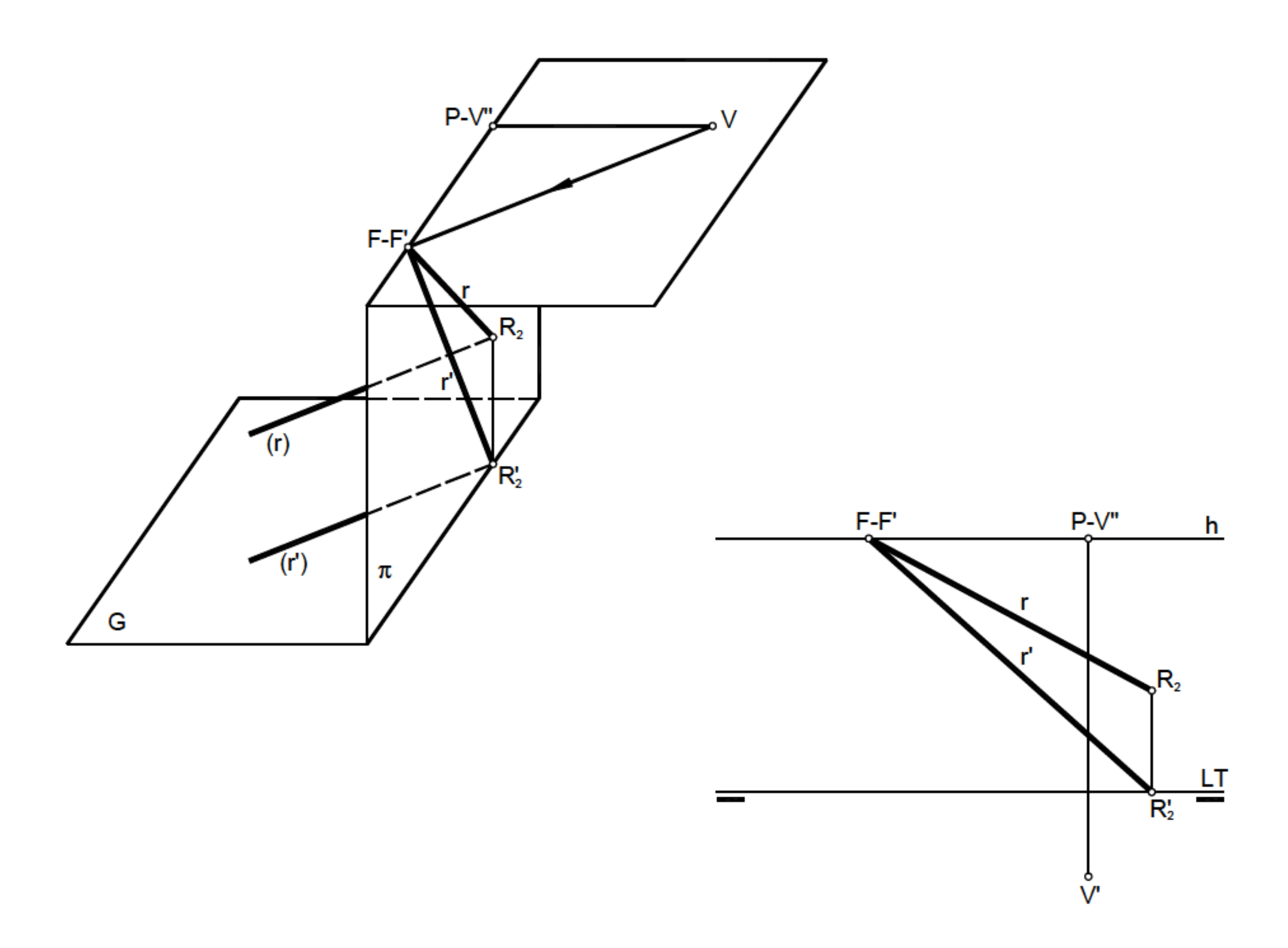
La perspectiva de (r) es una recta cualquiera oblicua -r-. El punto R_1-R'_1, es la perspectiva de la traza (R_1)-(R'_1) de la recta con el geometral.





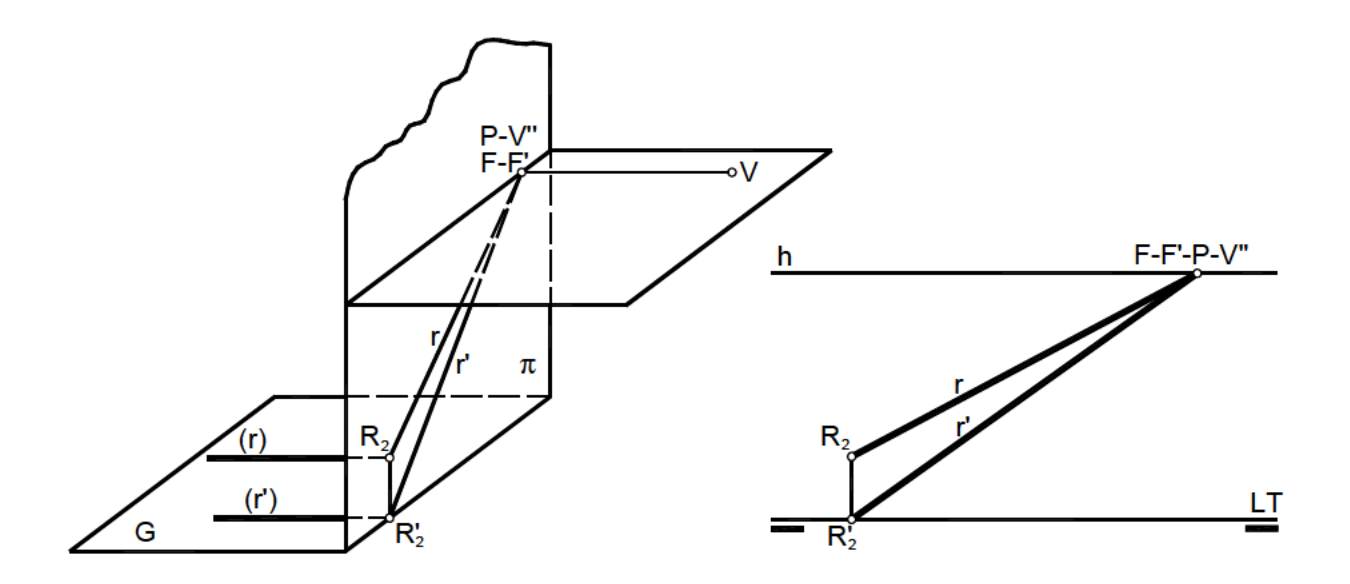
*.- Recta paralela al geometral.

Trazamos por V la paralela a ella, obteniendo una recta situada en el plano horizontal que nos dará el punto de fuga F-F' en la h. Este punto unido a la traza R_2-R'_2, nos da las perspectivas r y r'.



*.- Recta perpendicular al plano del cuadro.

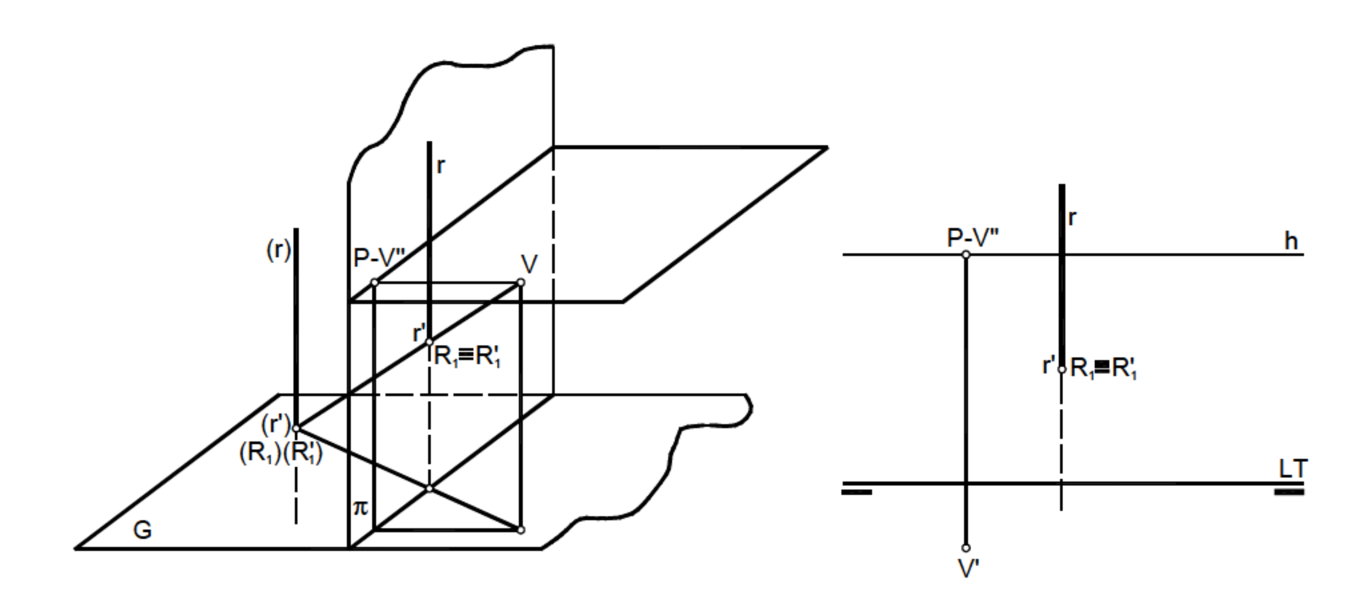
Es una recta horizontal, y por lo tanto su punto de fuga está sobre h; al trazar la paralela a ella por V, se obtiene como punto de fuga el punto principal P.



*. - Recta perpendicular al plano geometral.

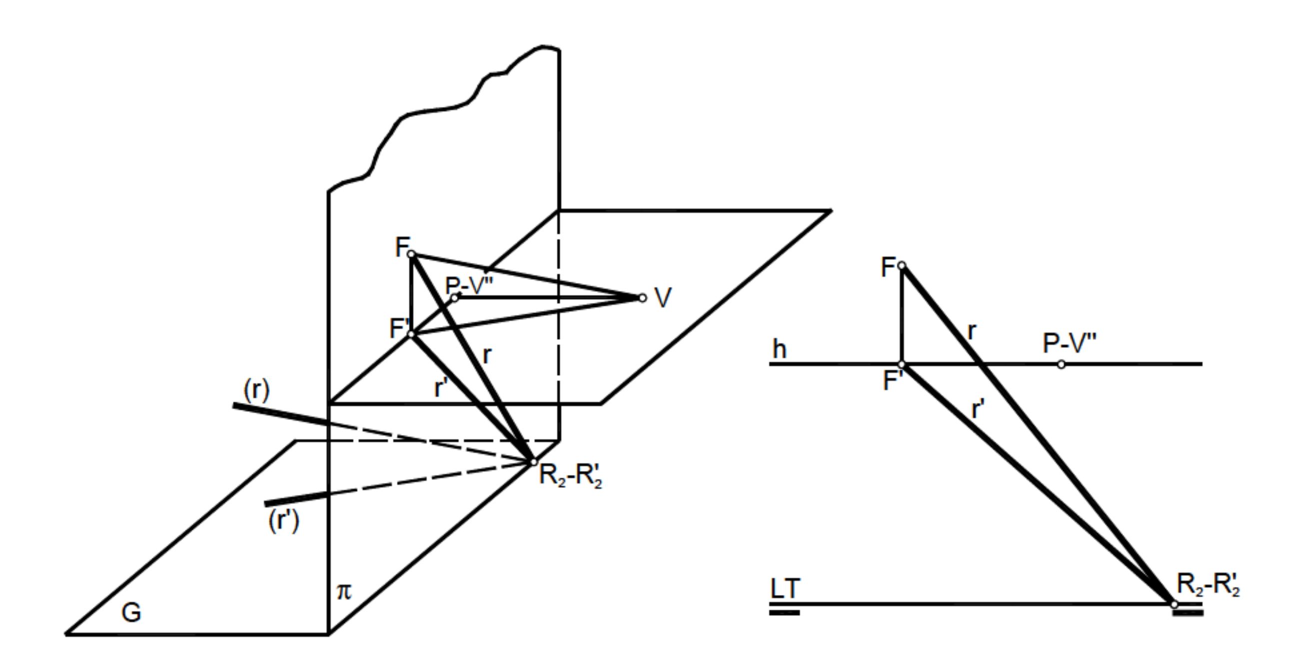
Su perspectiva directa es una recta r, perpendicular a la L.T. (intersección del plano del cuadro con el que pasa por V y (r)).

La perspectiva de (r') es r', que en este caso coincide con la perspectiva del punto, traza de la recta con el geometral (no hay punto de fuga).



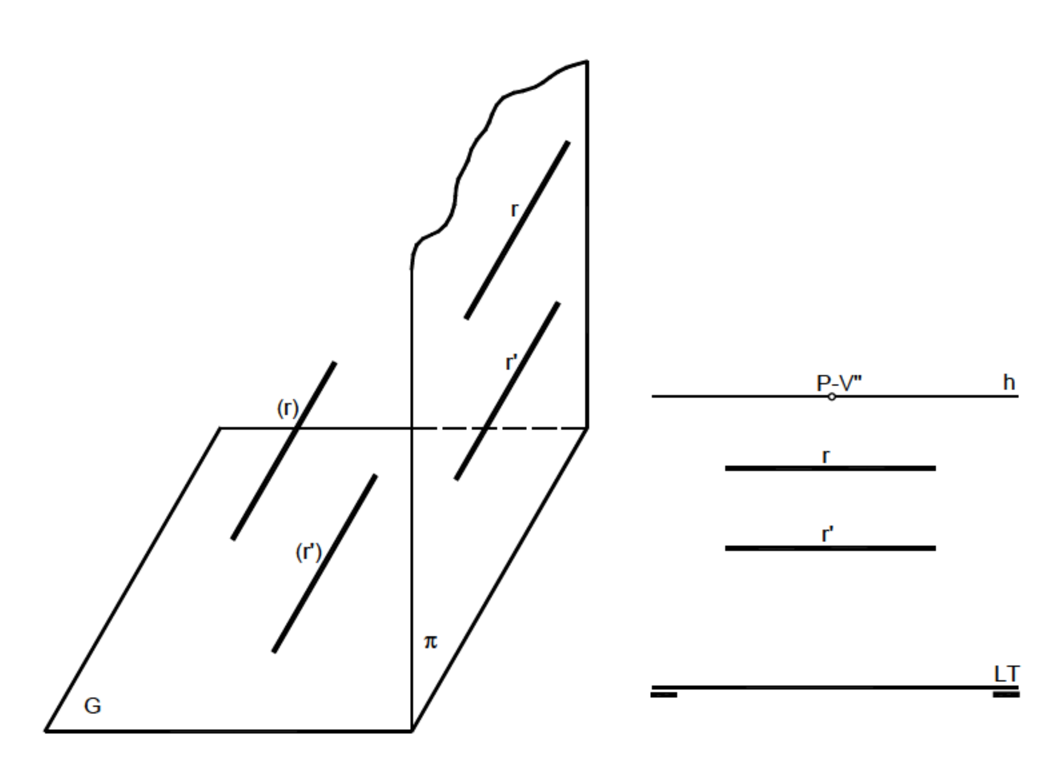
*.- Recta que corta a L.T.

La paralela a ella por V nos da, en el plano del cuadro, el punto de fuga F-F'; este punto unido con el R_2-R'_2, da la perspectiva directa y la de su proyección sobre el geometral.



*. - Recta paralela a la L.T..

En perspectiva son dos rectas paralelas a L.T.. No tiene punto de fuga ni trazas con los planos geometral y del cuadro.



2.3. Alfabeto del plano

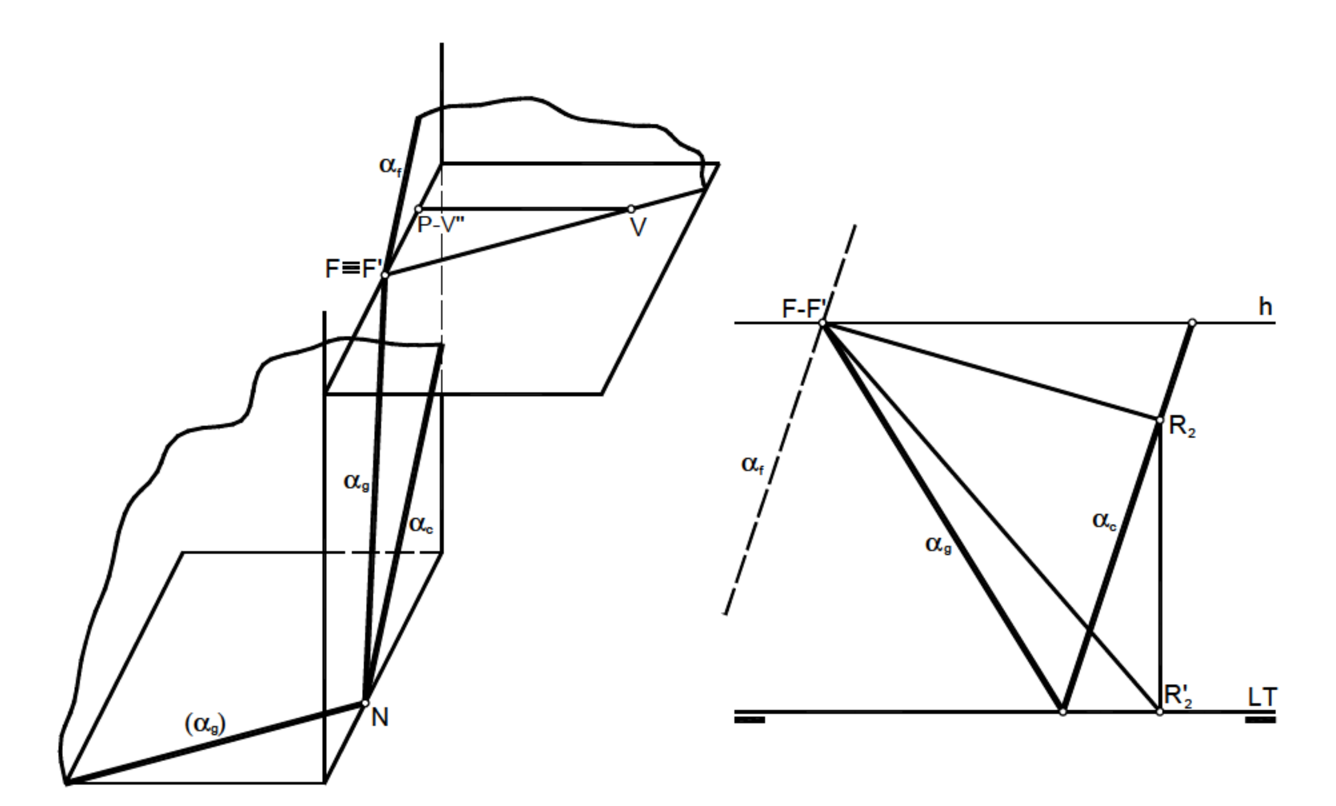
Haremos el estudio tomando como base un plano α oblicuo el cual corta al plano del cuadro según la recta o traza α_c y al plano geometral según la traza (α_g); estas dos rectas se cortan en un punto N de la línea de tierra.

La perspectiva de la traza α_c es ella misma por ser una recta del plano del cuadro. La perspectiva de (α_g) es α_g, que une el punto N del plano del cuadro con el punto F-F' de fuga de la recta (α_g). Este punto, que se halla en la línea h, lo obtenemos trazando por el punto de vista V la paralela a (α_g), hasta que corte a la h.

El plano paralelo al α que pasa por el punto de vista V, corta al plano del cuadro según la recta α_f la cual es paralela a α_c y pasa siempre por F-F'. Esta recta α_f se llama recta de fuga del plano, ya que es la perspectiva de la recta del infinito del mismo.

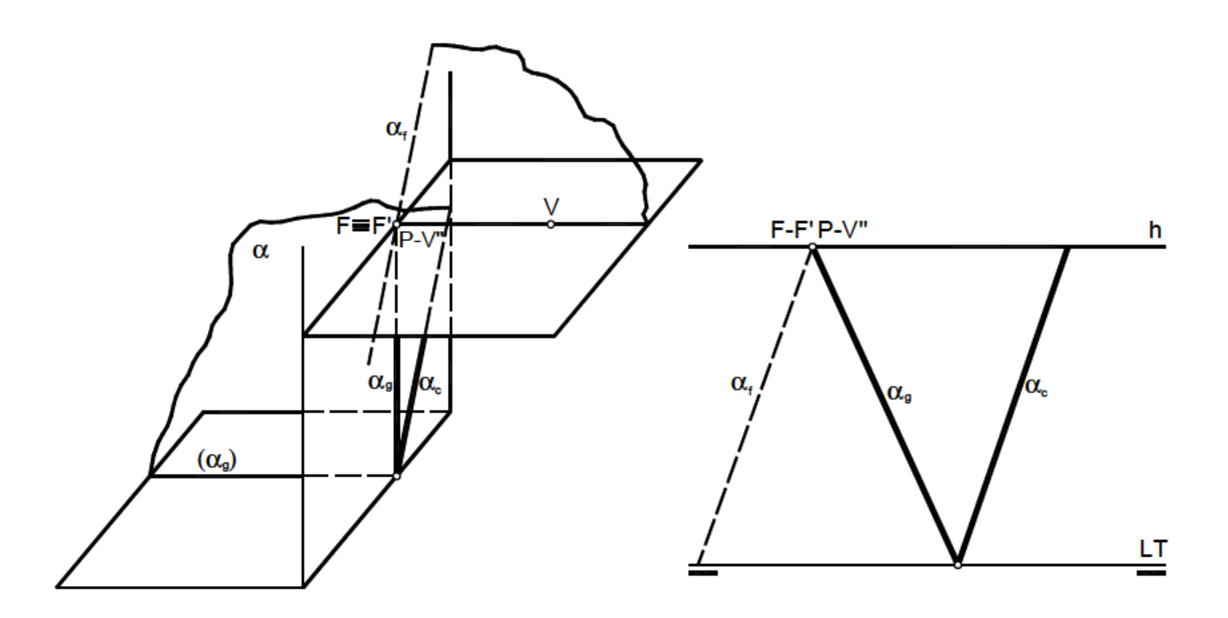
α_c y α_g: se cortan siempre en un punto de L.T.

α_g y α_f: se cortan siempre en un punto de la h.



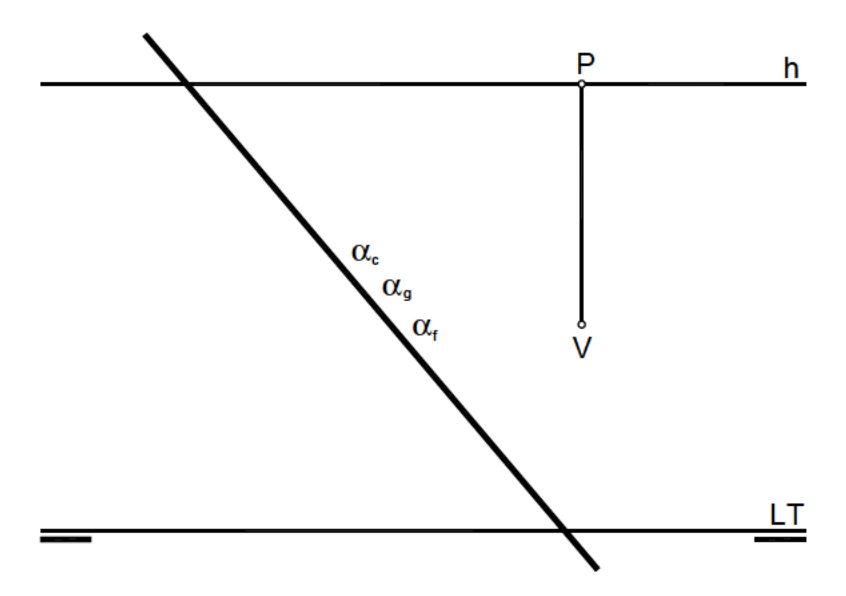
*.- Plano perpendicular al plano del cuadro.

Su traza con el plano del cuadro es una recta cualquiera oblicua a la L.T., α_c. La traza (α_g) con el geometral es perpendicular a la L. T. y su perspectiva es una recta que pasa por P-V", siendo este punto su punto de fuga F-F". El plano paralelo al dado que pasa por V, determina la traza de fuga α_f (obsérvese que α_g fuga en el punto principal P).



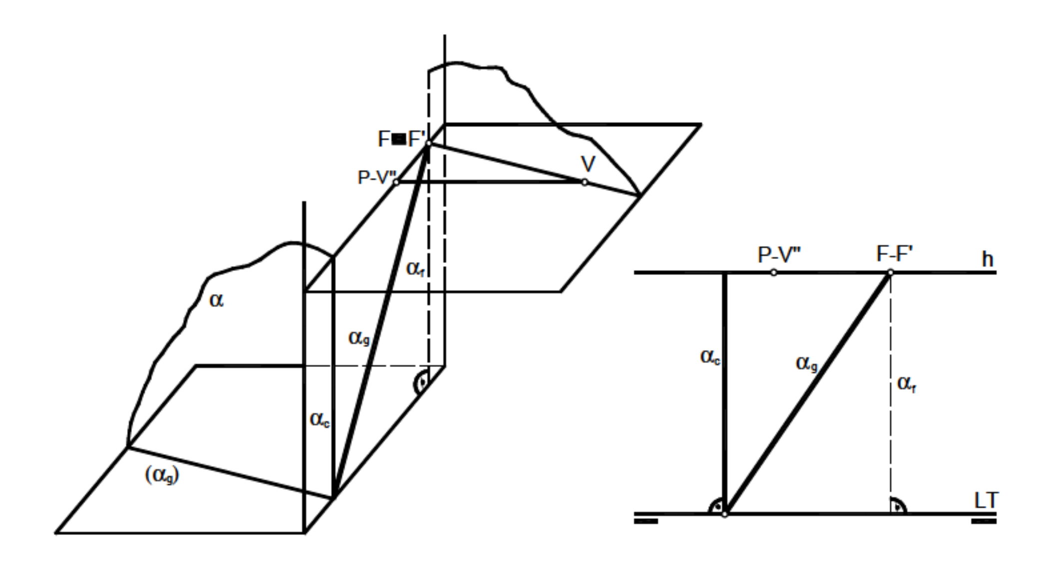
*.- Plano que pasa por el punto de vista.

Tiene sus trazas con el cuadro, con el geometral y su recta de fuga coincidentes.



*.- Plano perpendicular al geometral.

La perspectiva de α_c es ella misma, y α_f la obtenemos al trazar por V el plano paralelo al plano α que se trata de representar. El punto de fuga F-F' de la traza (α_g) está en la línea de horizonte.



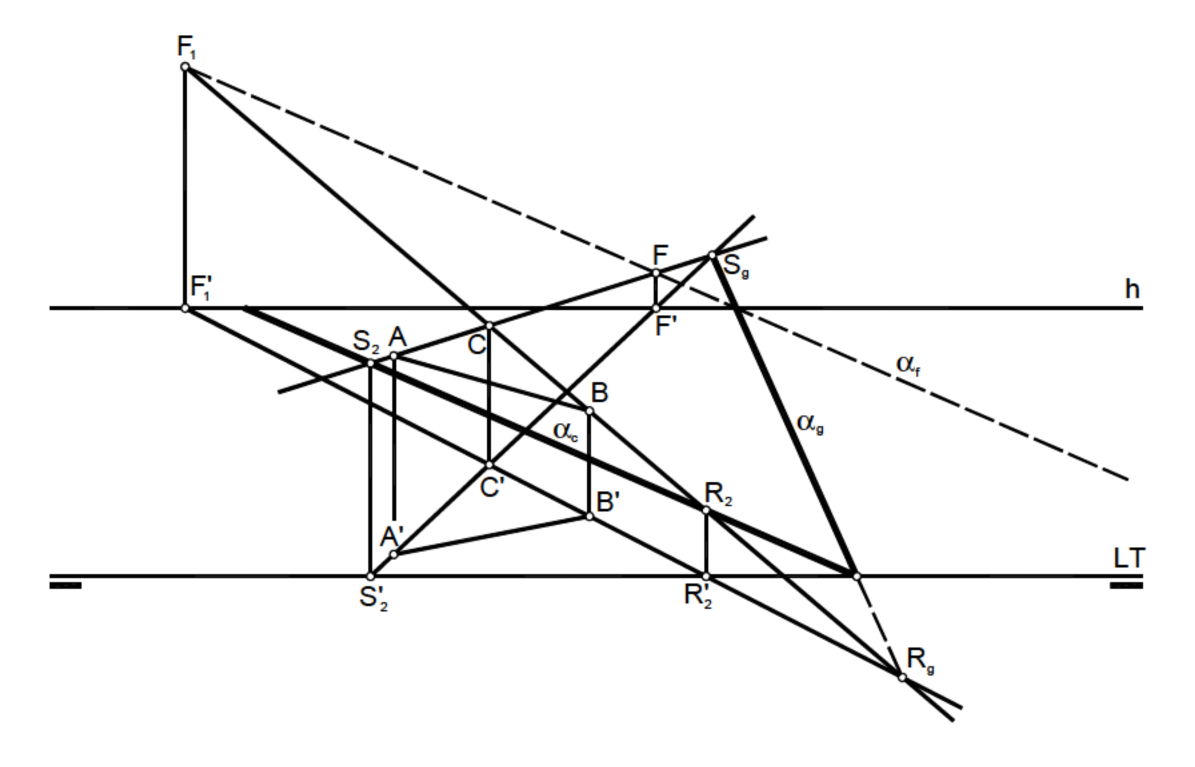
*.- Plano dado por tres puntos (A, B, C).

Uniendo A y C obtenemos la recta s-s', cuyas trazas con el cuadro y el geometral son S_2-S'_2 y S_g; uniendo C y B tenemos r-r', de trazas R_2-R'_2 y R_g con el cuadro y el geometral. El punto de fuga de r-r' es F_1-F'_1.

S_2 y $R_2 \equiv \alpha_c$

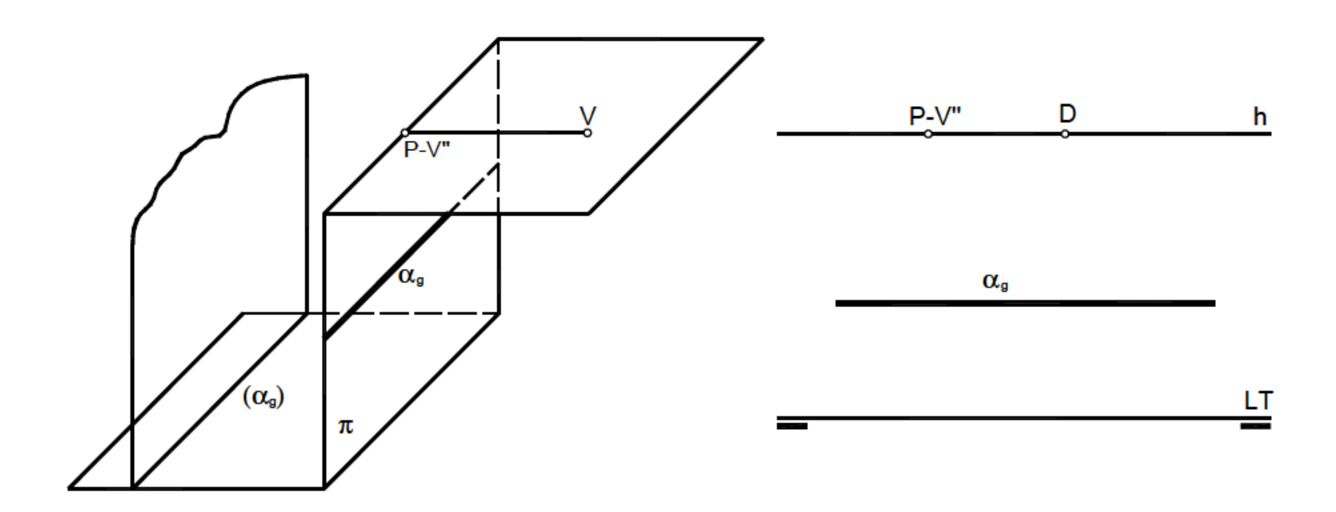
S_g y $R_g \equiv \alpha_g$

La traza α_f es paralela a α_c y pasa por F y F_1.



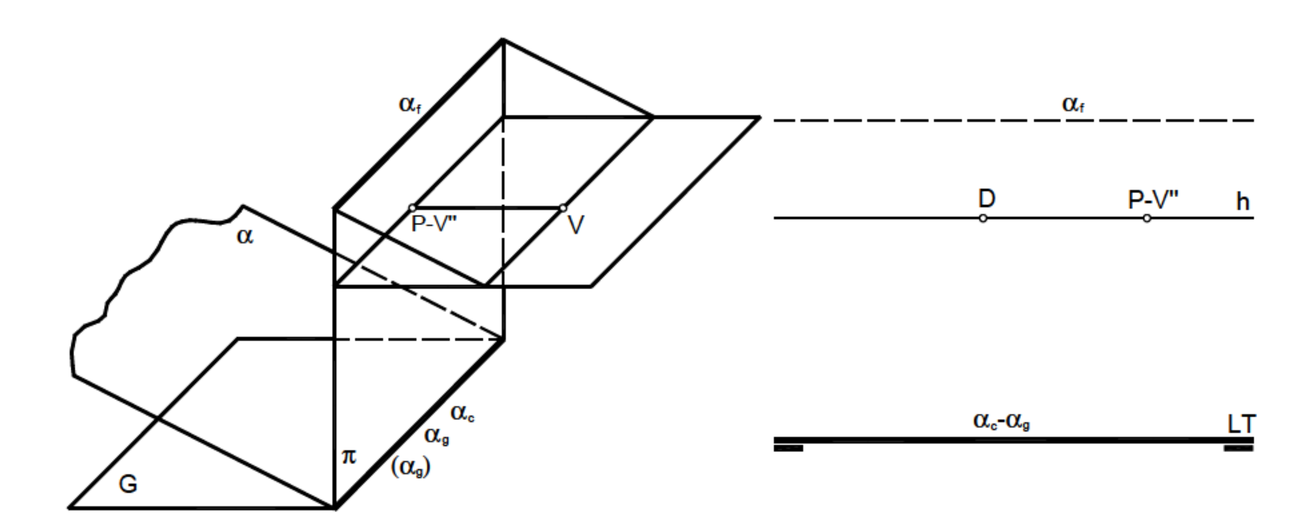
*.- Plano paralelo al cuadro.

Se representa. sólo por su traza α_g, paralela a L.T.. Las otras dos trazas son impropias.



*.- Plano que pasa por la L.T..

Las trazas con el cuadro y geometral están confundidas en la L.T. y la traza de fuga es una recta cualquiera paralela a la L.T.. Esta traza α_f es la que define el plano.

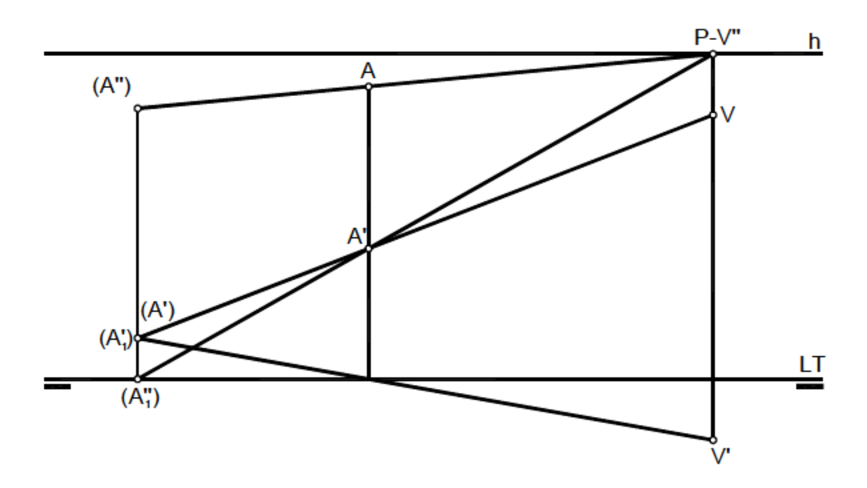


2.4. Paso del cónico al diédrico y viceversa

*.- Paso del punto.

Sea el punto (A')-(A'') en el Sistema diédrico (definido por el plano del cuadro y el geometral). La recta proyectante V''(A'')-V'(A') tiene por traza vertical el punto A, perspectiva directa del punto (A) del espacio. Proyectando (A) sobre el geometral, sus proyecciones diédricas son (A'_1)-(A''_1); la recta proyectante V''(A''_1)-V'(A'_1) tiene por traza con el cuadro el punto A', que es la perspectiva de la proyección sobre el plano geometral. Los puntos V, A' y (A'_1) están en línea recta.

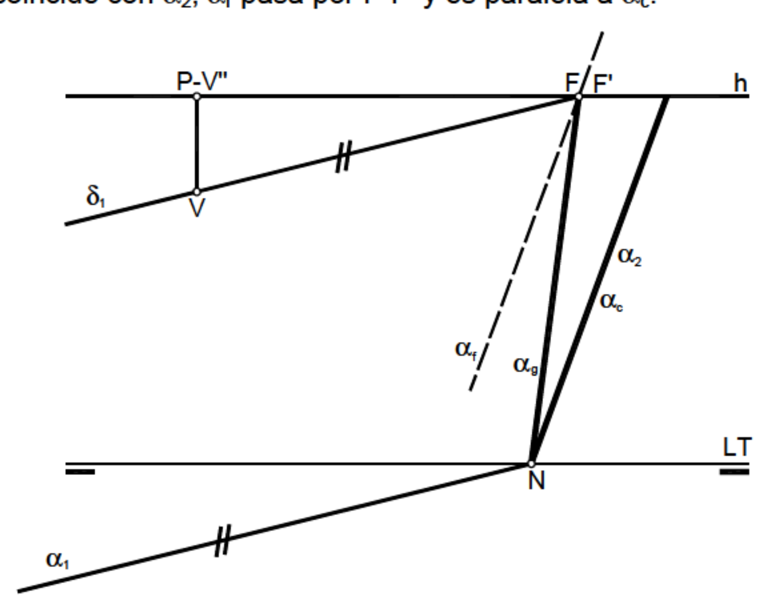
Realizando el proceso en sentido inverso pasamos del cónico al diédrico



*.- Paso del plano.

Tomaremos el plano vertical diédrico como plano del cuadro en cónico, vamos a fijar P-V y así, la línea de horizonte; a continuación trazamos por el punto de vista V el plano paralelo al α que corta al plano horizontal en δ_1 recta paralela a α_1 pasando por V. El punto F-F' será el punto de fuga de la traza α_1 del plano dado con el geometral, luego α_g es la perspectiva de α_1.

Además: α_c coincide con α_2, α_f pasa por F-F' y es paralela a α_c.

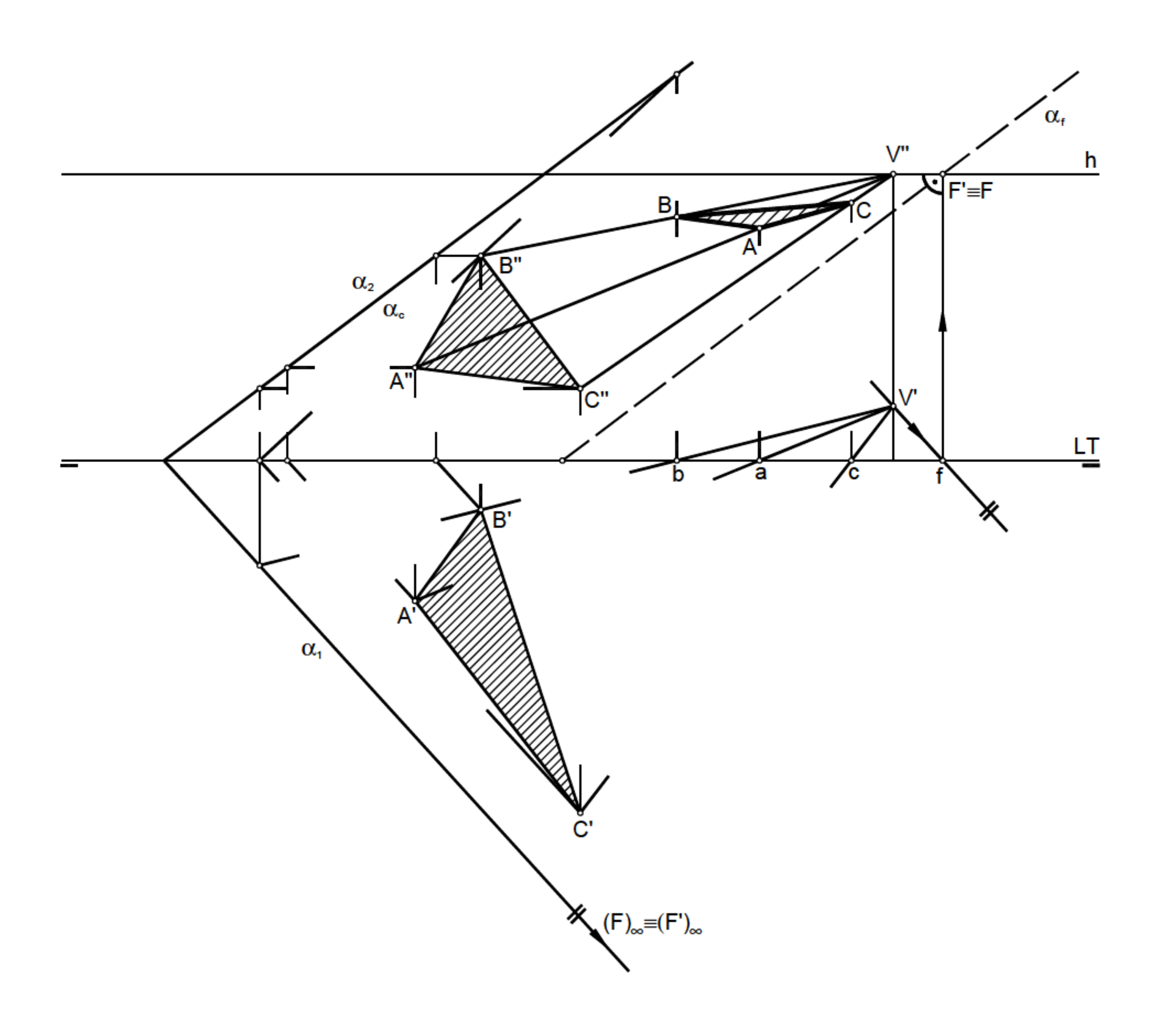


*.- Paso del plano y de una figura en él contenida del DIÉDRICO al CÓNICO.

En un sistema de proyecciones diédricas tenemos el pleno α (α_2-α_1) y en él contenida la figura (ABC), se desea su paso a un sistema de perspectiva cónica de vértice V (V''-V') y líneas de referencia -h- y -t-. Los dos sistemas (diédrico y cónico) comparten línea de tierra, y los planos vertical y horizontal diédricos pasarán a ser el cuadro y geometral en cónico.

La traza α_2 del plano pasará a ser la traza con el cuadro α_c. La traza de fuga α_f paralela a la anterior pasará por F'≡F, punto que se obtiene visualizando desde V' el punto $(F)_\infty \equiv (F')_\infty$ de la traza α_1.

La perspectiva ABC se obtiene mediante los planos visuales que en proyección quedan definidos por (V'A'-V''A''), (V'B'-V''B''), (V'C'-V''C''); sus trazas respectivas con el cuadro serán las verticales que parten de los puntos a, b, c de la línea de tierra, sobre las que se encuentran los puntos A, B, C de la perspectiva cónica de la figura.

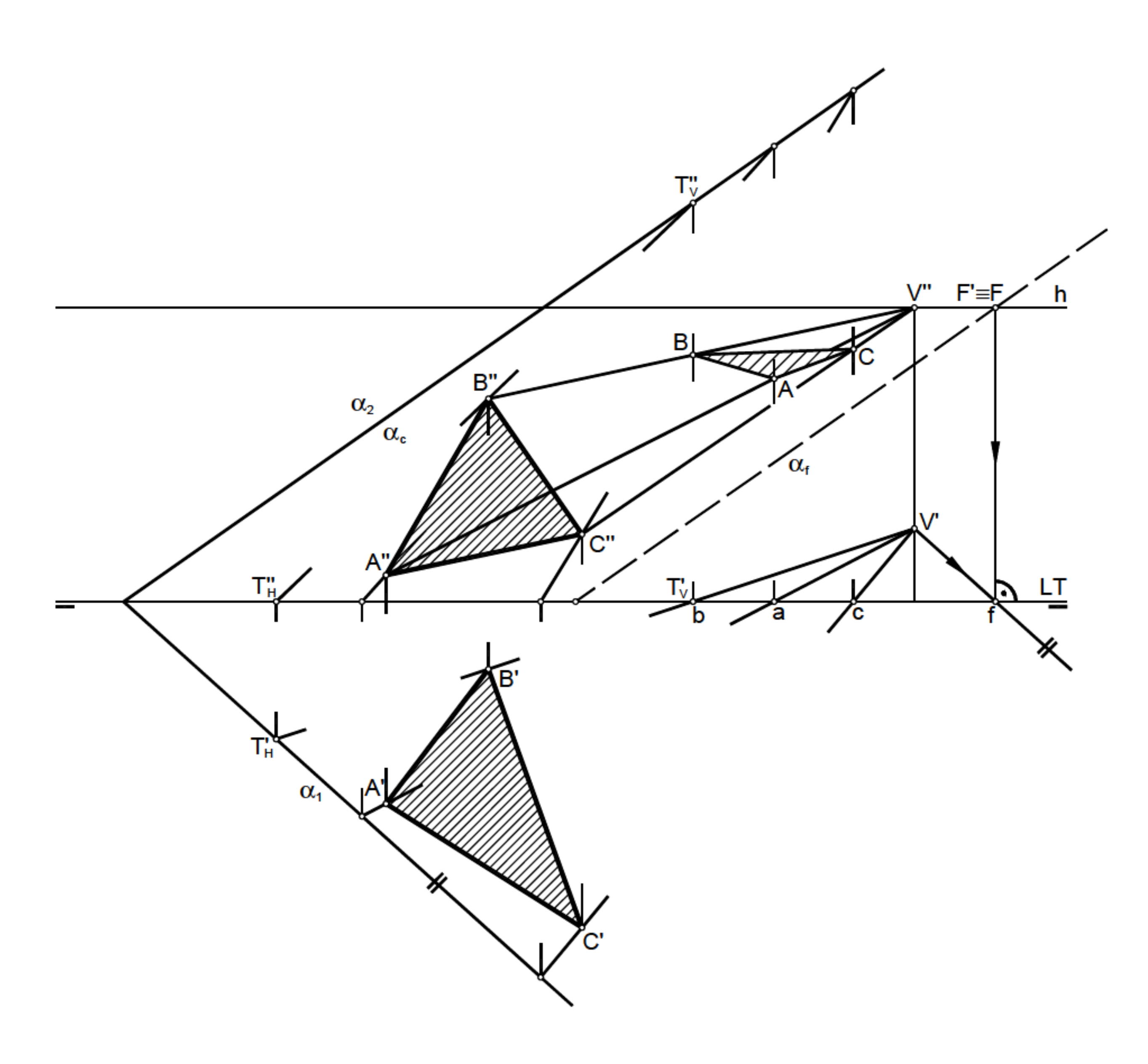


*.- Paso del plano y de una figura en él contenida del CÓNICO al DIÉDRICO.

En un sistema de perspectiva cónica se encuentra el plano α (α_c-α_f) y en él contenida la figura ABC.

En el sistema diédrico al que se desea pasar, la traza vertical será α_2 y la horizontal α_1, será paralela a la dirección V'f; el punto f se obtiene proyectando F≡F' a línea de tierra.

Los vértices de las proyecciones diédricas de la figura se encontrarán en las prolongaciones de las visuales V"A, V"B, V"C y en las intersecciones respectivas de los planos visuales (ver apartado anterior) con el plano α de la figura.



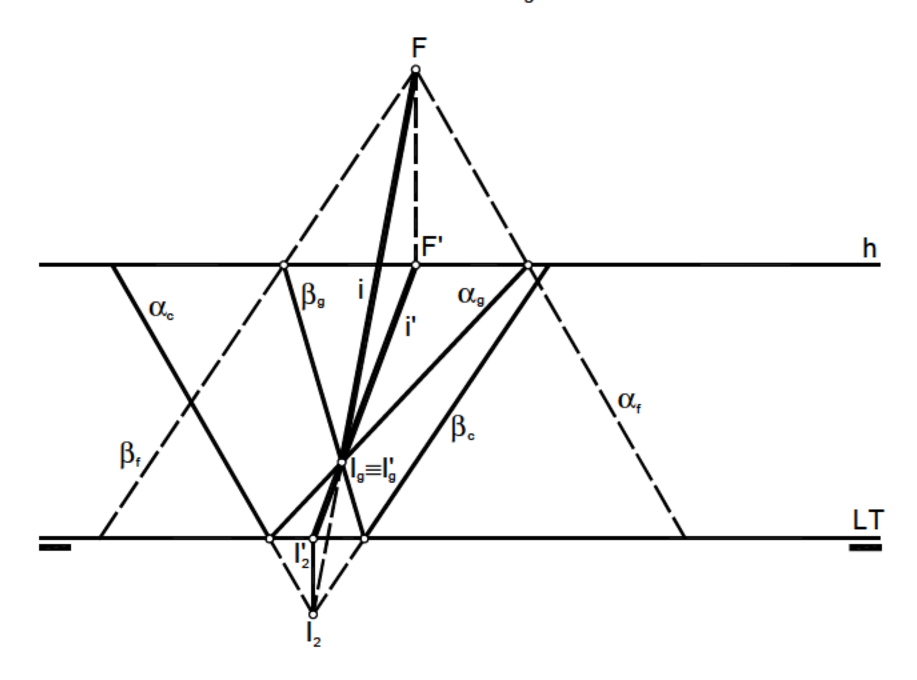
3. INTERSECCIONES

3.1. Intersección de dos planos (α y β)

Se determina hallando las intersecciones de las trazas del mismo nombre. El punto I_2 es la intersección de α_c y β_c. La traza de la recta -i- intersección con el plano geometral, $I_g \equiv I'_g$, viene definida por α_g y β_g.

Asimismo α_f y β_f definen F, punto de fuga de la recta buscada.

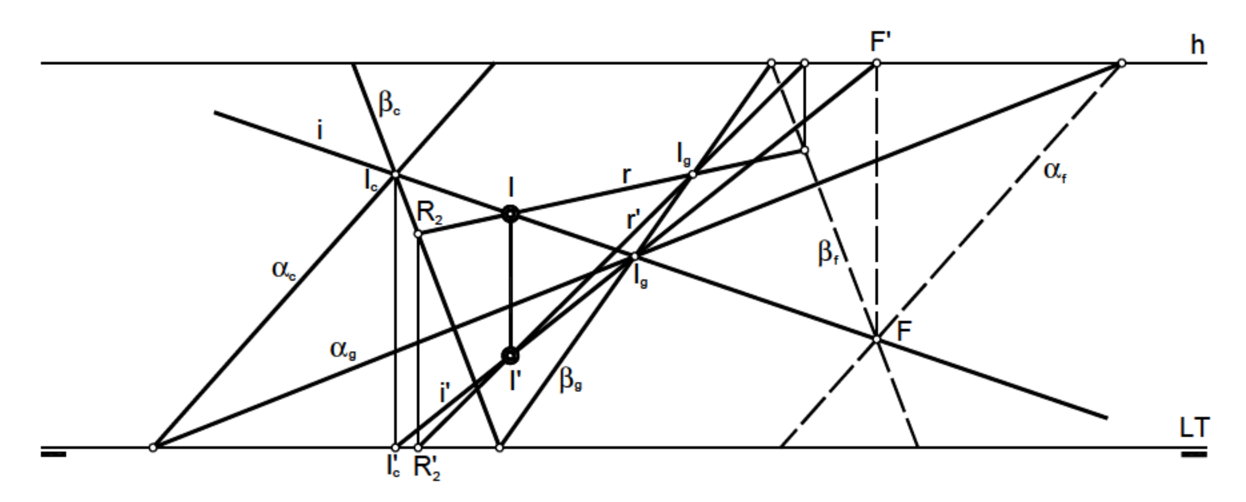
La recta -i- será la definida por los puntos I_2, I_g, F; y su proyección -i'- por I'_2, I'_g, F'.



3.2. Intersección de recta y plano (r y α)

Por la recta pasamos un plano cualquiera β_c-β_g-β_f; se hace pasar su traza β_c con el cuadro por el punto R_2, traza de la recta r con dicho plano, y su traza β_g con el geometral por el punto I_g, traza de la recta con el mismo plano

Los planos α y β se cortan según i-i', que corta a la recta dada en el punto I-I' de intersección que buscamos.

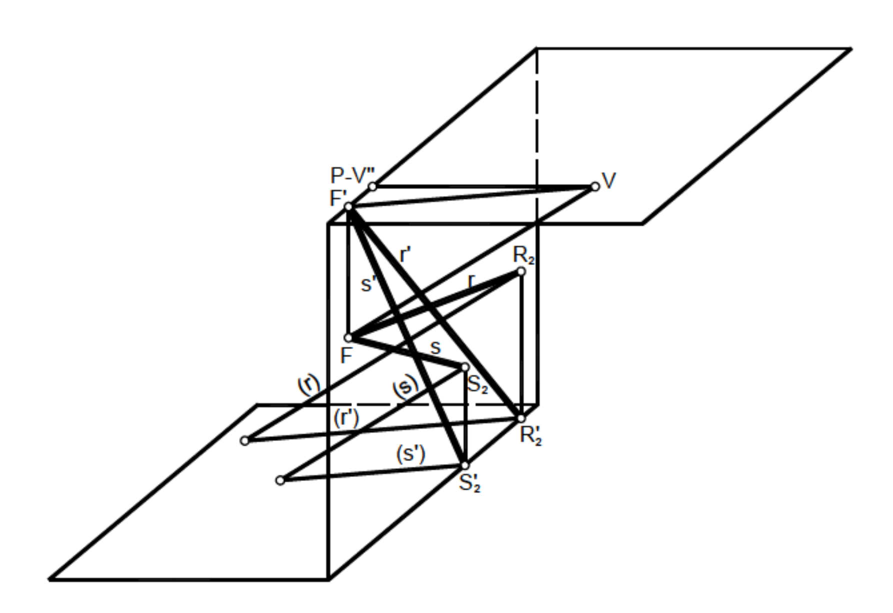


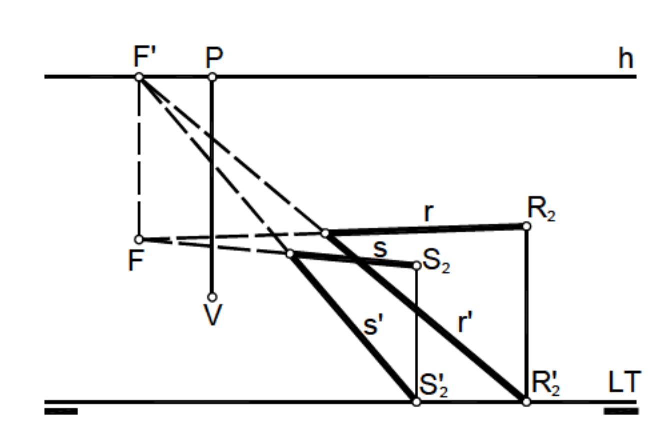
4. PARALELISMO

4.1. Rectas paralelas

Tenemos las rectas r y s paralelas en el espacio, el punto de fuga F-F' se obtiene al trazar por el punto de vista V la paralela a ellas (todas las rectas paralelas fugan en el mismo punto).

Uniendo las trazas de las rectas con el plano del cuadro R_2-R'_2 y S_2-S'_2 con el punto de fuga F-F' tenemos las perspectivas r-r' y s-s' de las dos rectas paralelas.



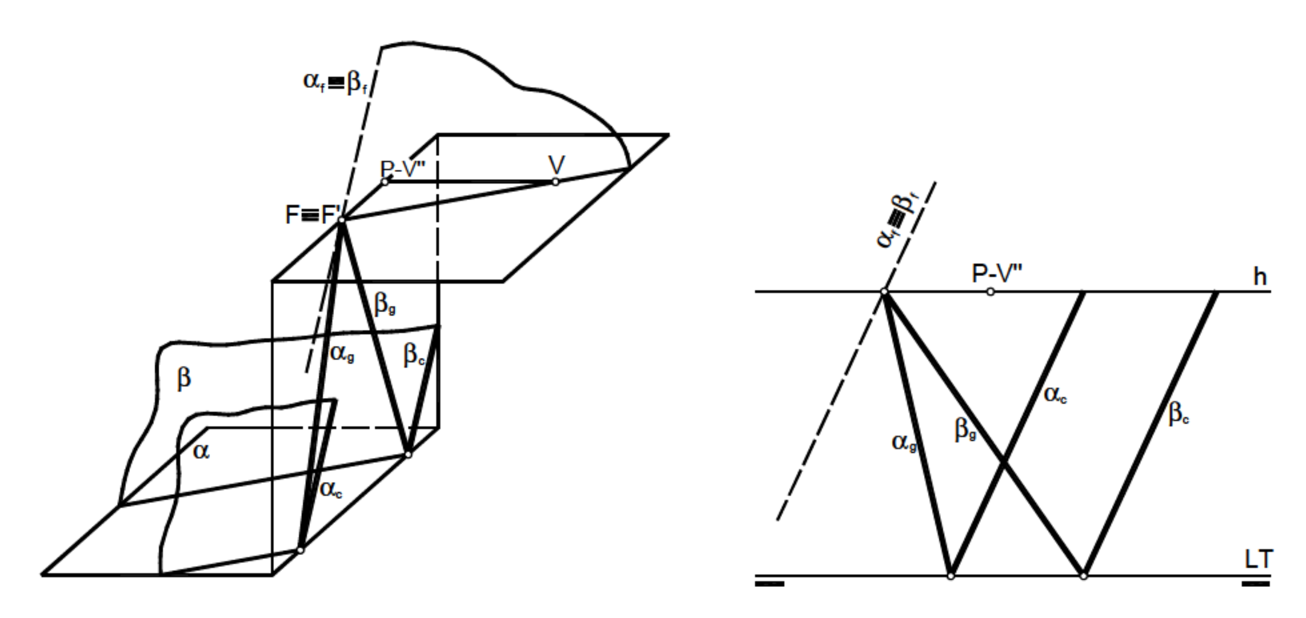


4.2. Planos paralelos

Las trazas α_c y β_c con el plano del cuadro son dos rectas paralelas.

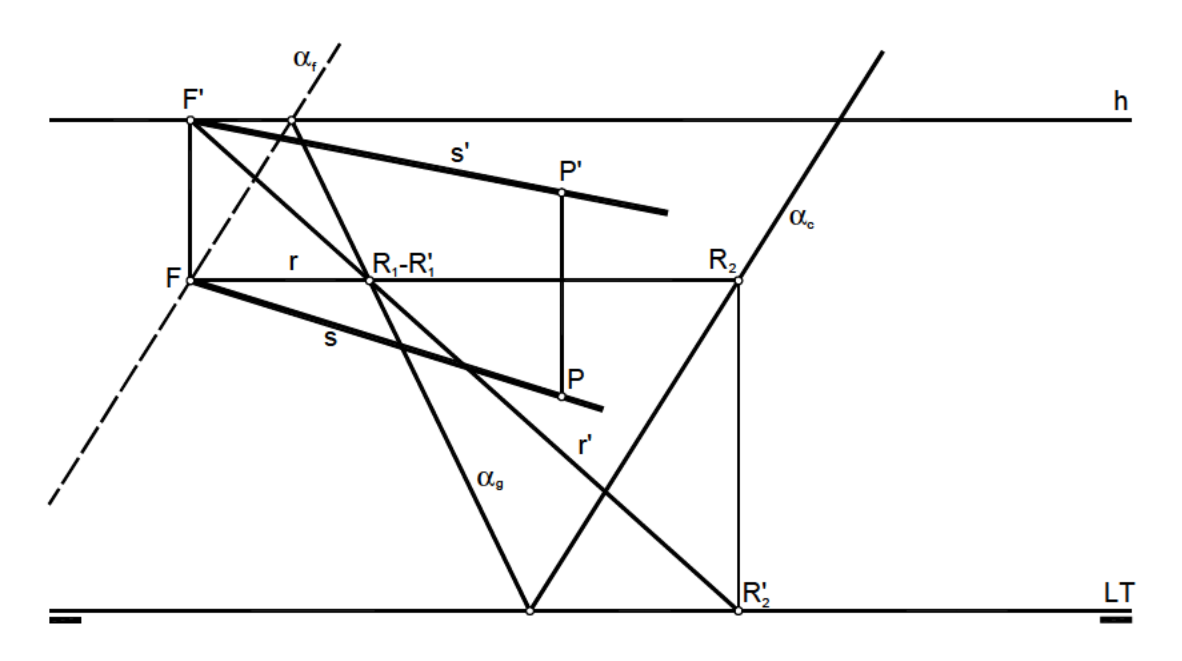
Sus trazas (α_g) y (β_g) con el geometral, por ser paralelas en el espacio, fugan en un mismo punto de la h.

Las trazas α_f y β_g están superpuestas, porque son la traza del plano paralelo a los dados trazado por el punto de vista.



4.3. Trazar por un punto P del espacio una recta paralela un plano dado

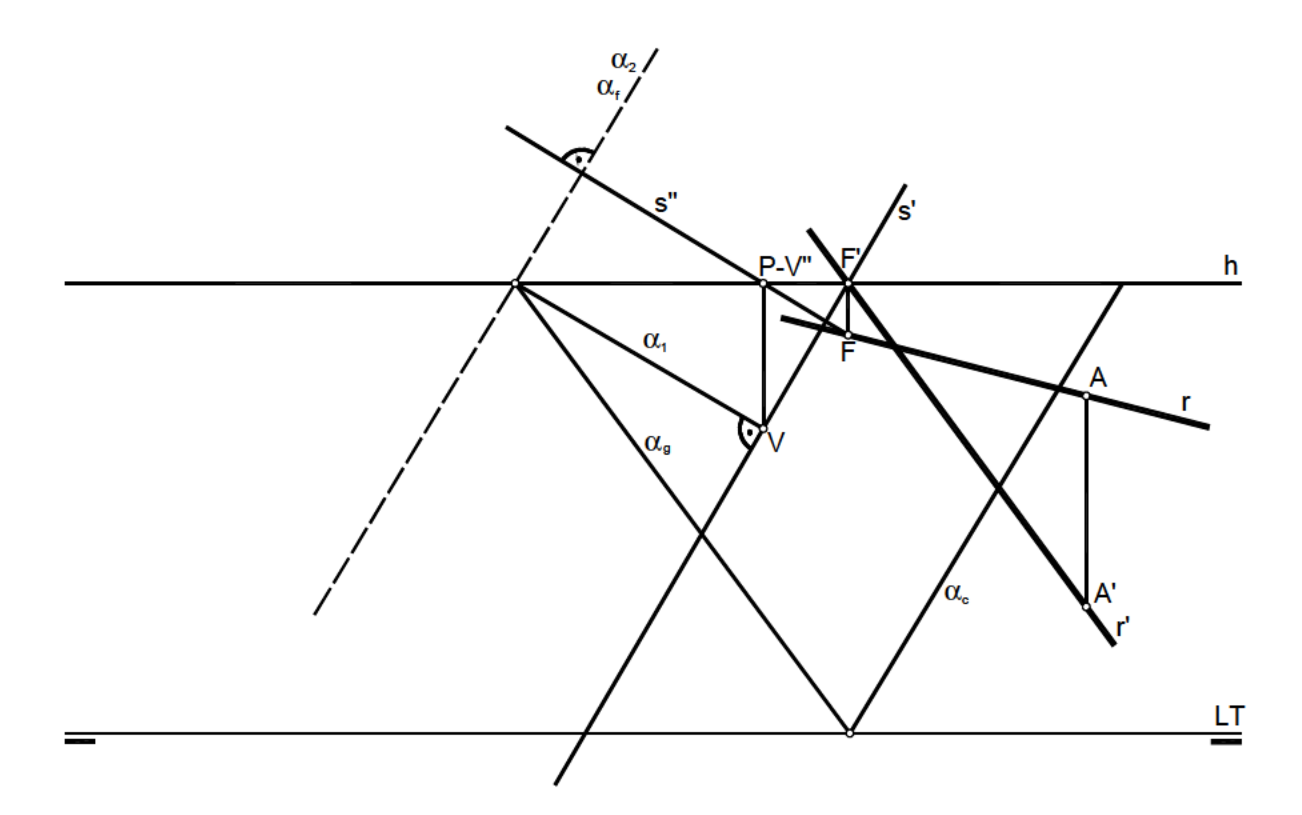
Situamos en el plano una recta arbitraria r-r' (R_2 en α_c, R_1-R'_1 en α_g y F en α_f), determinando el punto de fuga F-F' de esta recta, lo unimos con P-P' y obtenemos la recta s-s' paralela a la r-r', por la tanto paralela al plano dado. Luego la única condición es que el punto de fuga de la recta esté en la recta límite o de fuga del plano.



5. PERPENDICULARIDAD

5.1. Recta perpendicular a un plano

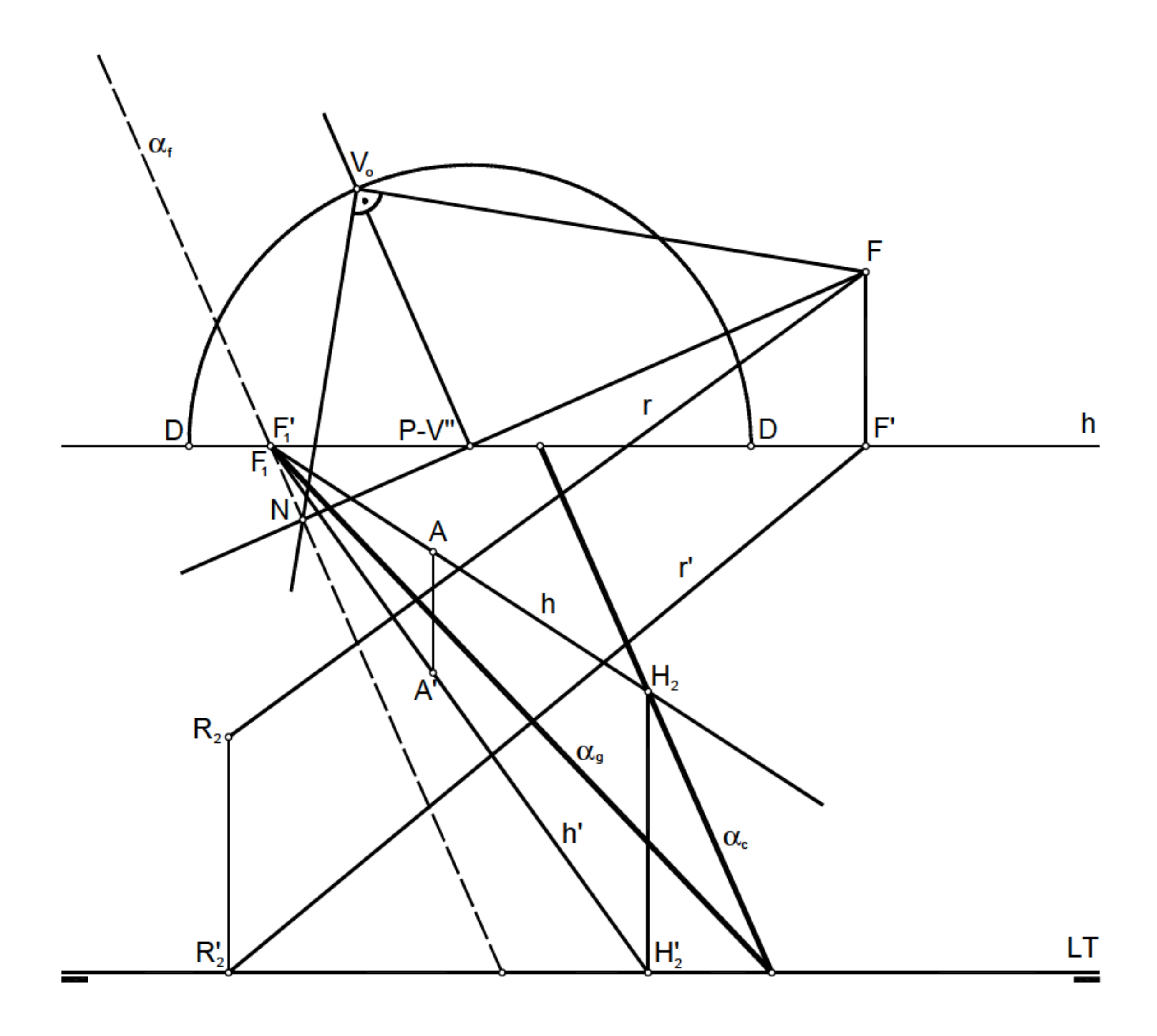
Pasamos del sistema cónico al diédrico formado por el cuadro-horizonte. Trazamos un plano α_1-α_2 paralelo al plano α por V. Las proyecciones diédricas de la perpendicular al plano α_1-α_2 son s" y s' siendo su traza vertical, y por tanto punto de fuga, el punto F-F'; a dicho punto fugarán todas las perpendiculares al plano. Si la recta debe pasar por el punto A, la solución será r-r' cuyas proyecciones las obtenemos uniendo A con F y A' con F'.



5.2. Plano perpendicular a una recta por el punto A-A'

Para que pase por el punto A-A' trazamos la horizontal h-h' perpendicular a r-r' y primero tenemos que obtener el punto de fuga, de la horizontal, F_1- F'_1. Para ello unimos F (punto de fuga de r) con V" y por este punto trazamos la perpendicular a F-V", llevando sobre ella el alejamiento -d- del punto de vista, por V_o trazamos la perpendicular a F-V_o y obtenemos el punto N, en la prolongación de F-V", punto por el que pasa α_f, que sabemos es perpendicular a FN. (Procedimiento inverso al empleado para trazar una recta perpendicular a un plano)

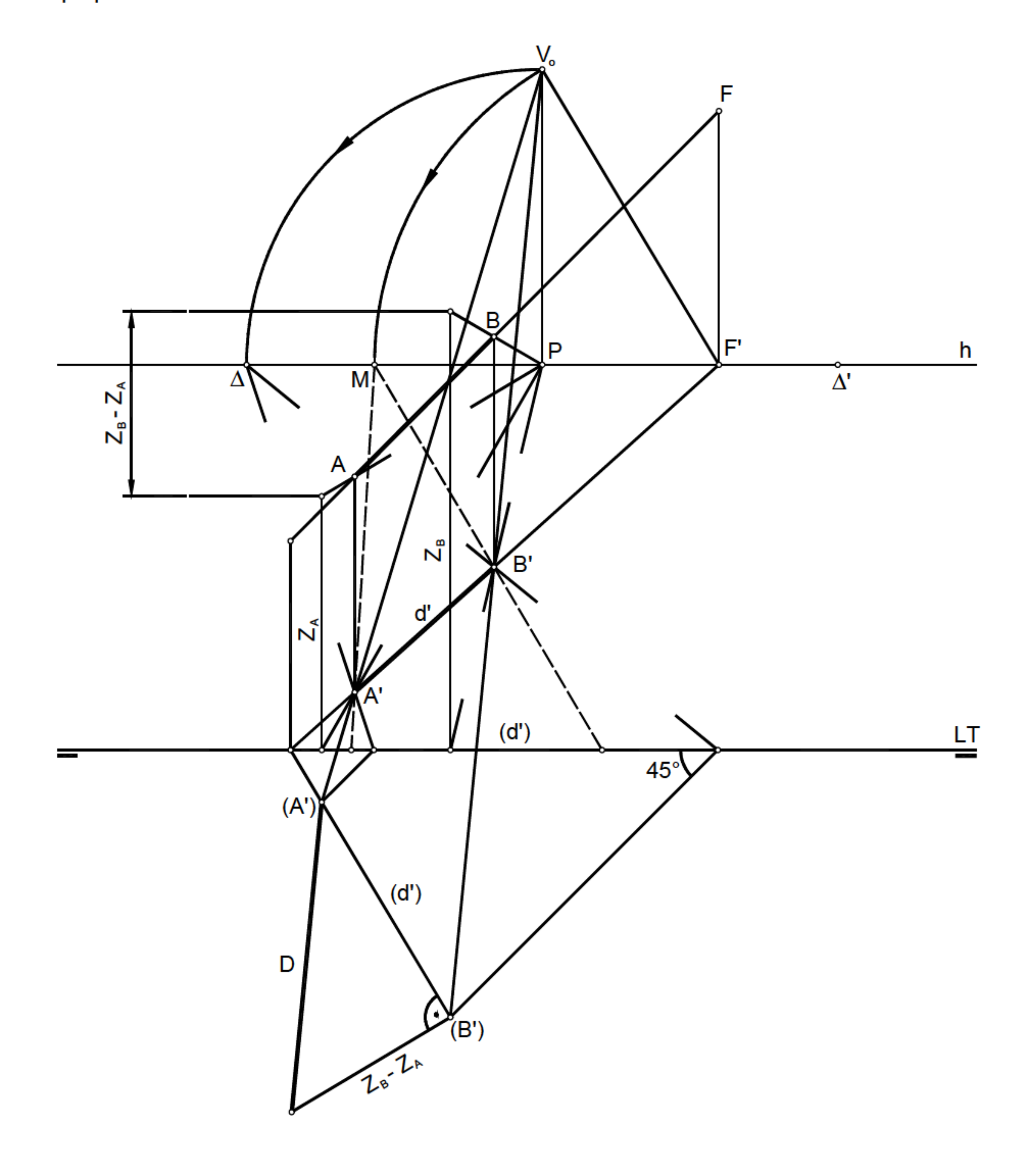
Obtenida la horizontal h-h', por su traza H_2 con el plano del cuadro trazamos α_c, paralela a α_f, quedando también definida α_g.



6. DISTANCIAS

6.1. Distancia entre dos puntos A y B

El punto Δ es el de distancia, pues se ha tomado $P\Delta = PV_o$; unimos Δ con A' y B' y estas dos paralelas cortan a la L.T. en dos puntos desde los cuales se trazan rectas de 45° y donde éstas cortan a la proyección desde V_o de A' y B' obtenemos la proyección (d'). Para obtener la verdadera magnitud -D- hay que hallar la diferencia de cotas Z_B-Z_A. Las cotas de los respectivos puntos se hallan pasando desde P una recta por cada uno de ellos hasta cortar a la L.T. y levantar desde ahí una perpendicular.

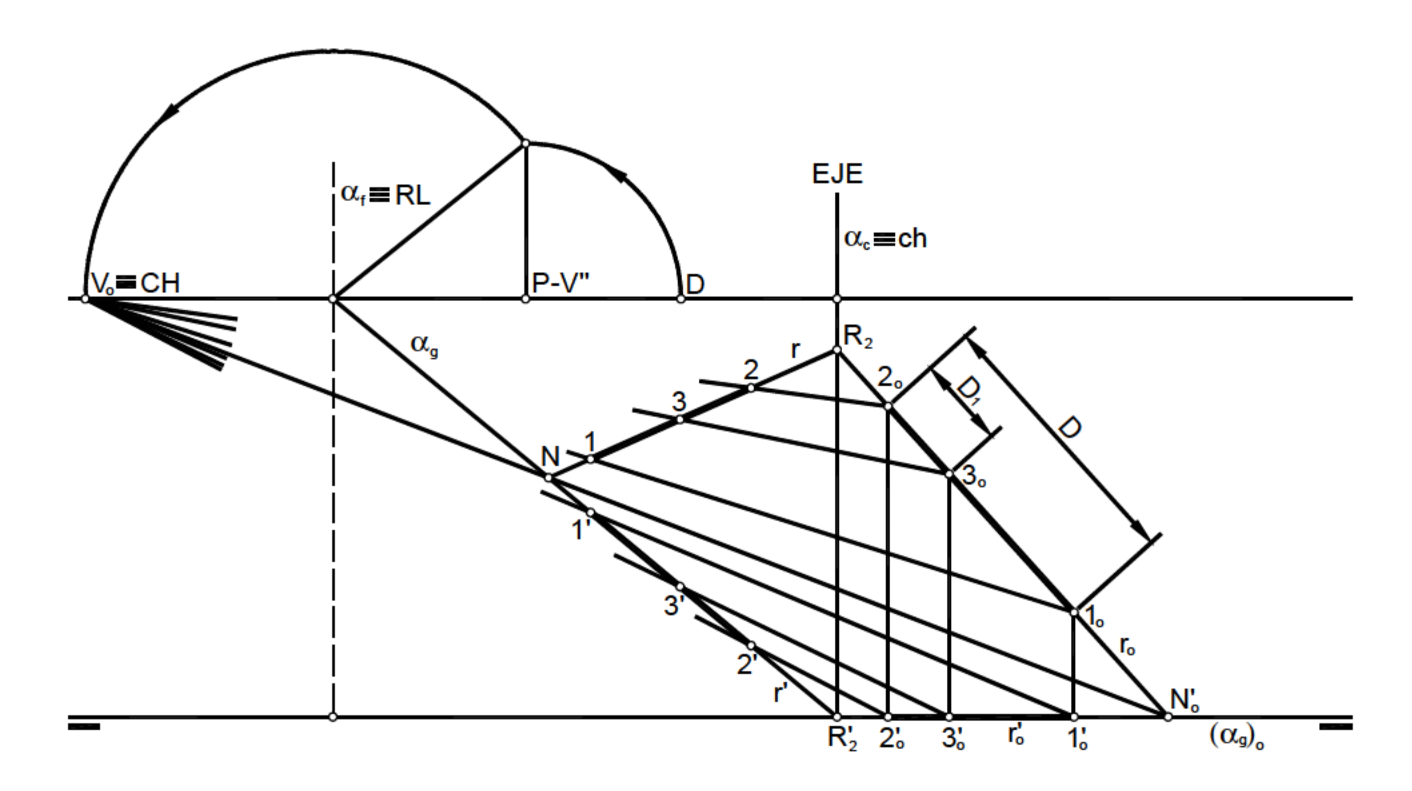


6.2. Situar una distancia dada sobre una recta r

Hacemos pasar por r el plano α (α_c-α_g-α_f) proyectante, y lo abatimos sobre el cuadro, situándose α_g en $(\alpha_g)_o$ sobre la L.T..

A continuación hallamos el centro de homología V_o-Ch, abatiendo el punto de vista alrededor de α_f que es la recta límite.

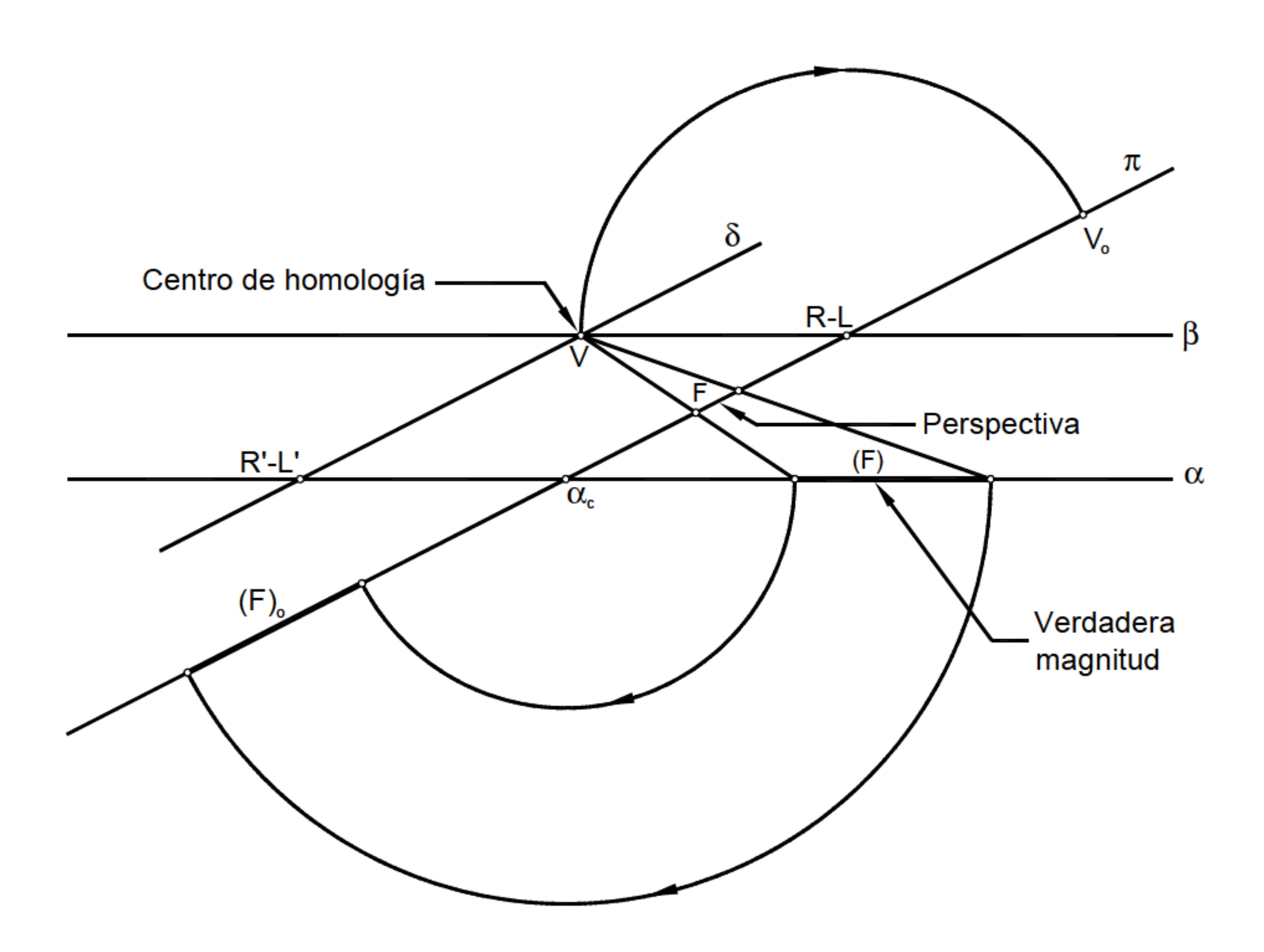
La recta abatida es r_o-r_o'. Tomamos un segmento auxiliar D_1 sobre r_o, (2_o-3_o); en la perspectiva r, obtenemos 2-3 y en la perspectiva r' será 2'-3'. La verdadera magnitud del segmento dado es 1_o-2_o, obteniendo por homología el extremo 1 en r y por afinidad su proyección 1' sobre r'. Es posible reducir trazados si el punto N y su homólogo N_o son accesibles.



7. ABATIMIENTOS

Introducción a las relaciones homológicas.

En la figura quedan claramente explicadas todas las relaciones y elementos, dejando a cargo del lector el repaso correspondiente en el sistema diédrico.



FIGURAS HOMÓLOGAS	CENTRO DE HOMOLOGÍA	EJE	RECTA LÍMITE
$(F) \rightarrow F$	V	$\alpha \cap \pi$	$\alpha \cap \delta$
$F \rightarrow (F)$	V	$\alpha \cap \pi$	$\beta \cap \pi$
$(F)_o \rightarrow F$	V_o	$\alpha \cap \pi$	$\alpha \cap \delta$
$F \rightarrow (F)_o$	V_o	$\alpha \cap \pi$	$\beta \cap \pi$

7.1. Abatimiento de un punto

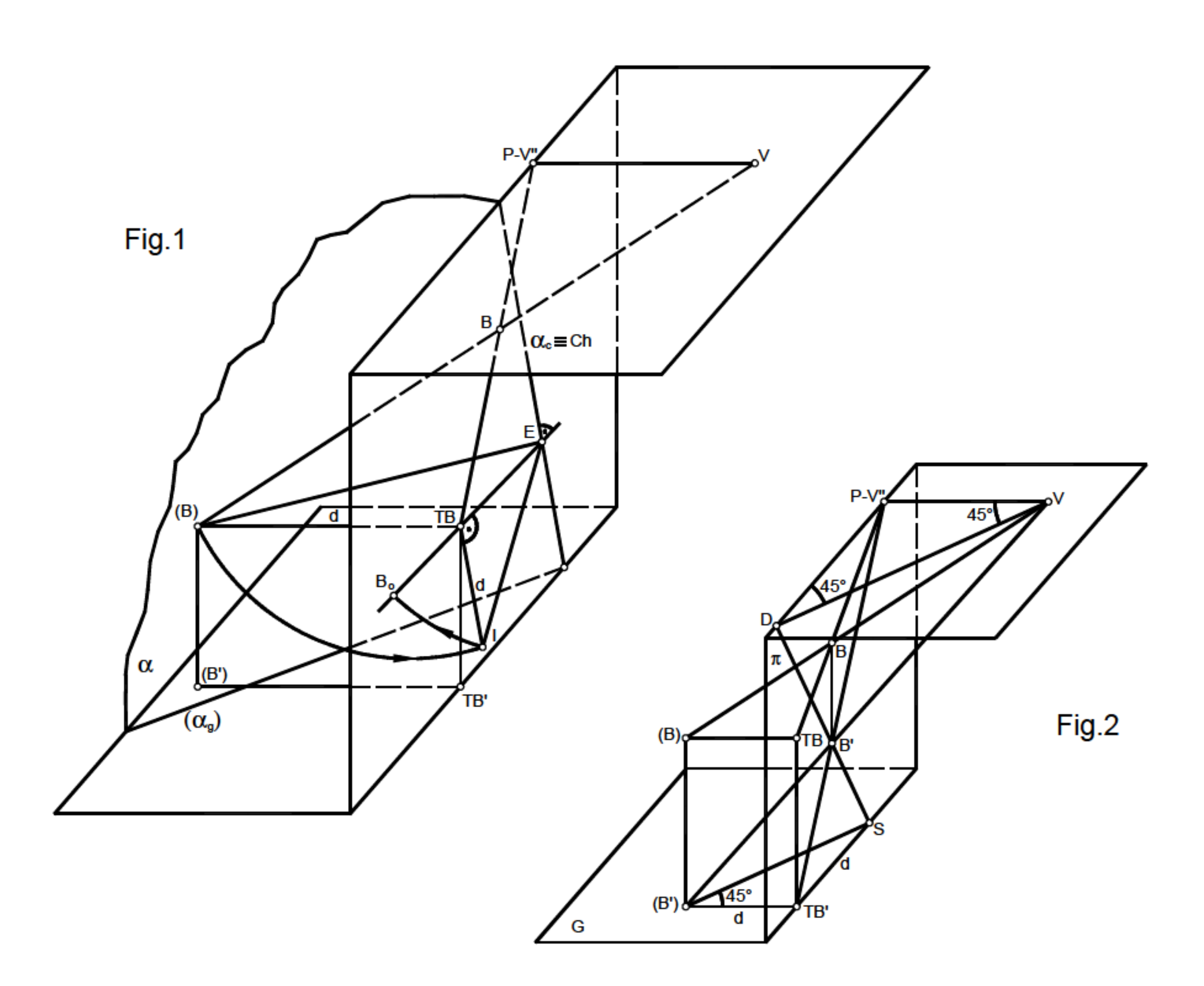
La traza α_o del plano α con el cuadro es la charnela del abatimiento. El punto (B) se proyecta ortogonalmente en TB, sobre el plano del cuadro; el radio de giro es (B)-E, siendo TB-E y TB-I la perpendicular y la paralela a la charnela trazadas por TB; TB-I es la distancia del punto (B) al plano del cuadro.

Luego los triángulos rectángulos (B)-TB-E y E-TB-I son iguales. . . . .

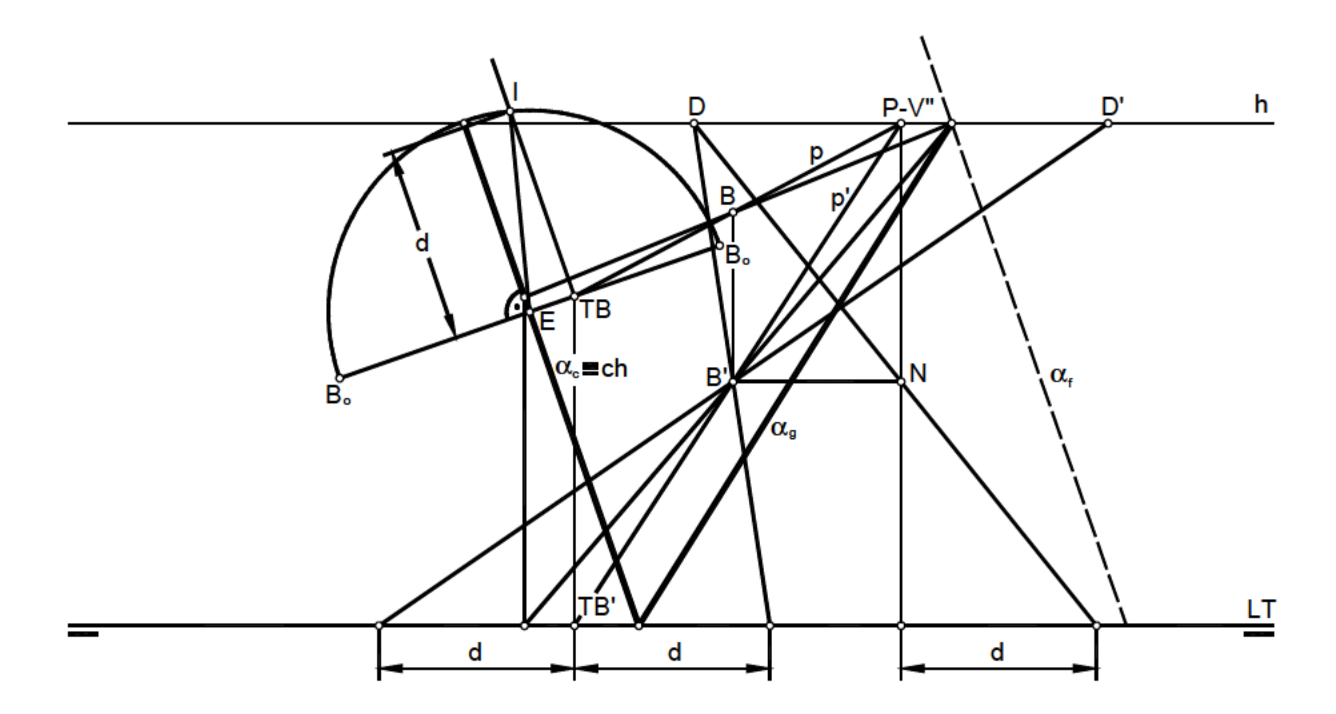
(B)-TB = TB- I
(B)-E = E-I

El punto abatido es el B_o.

En la figura nº 2, se explica de nuevo el método de hallar el alejamiento d del punto (B) respecto al cuadro, uniendo el punto B' con D y V'', siendo d = TB'-S.



Si estudiamos el tercer dibujo, ya en cónico, vemos el plano α_c-α_g-α_f y B-B' que pertenece a α. Por B trazamos la perpendicular al cuadro, así como su intersección con él. Unimos B-B' con P y obtenemos la perpendicular p-p', su traza con el cuadro es TB. Por TB trazamos la perpendicular y la paralela a α_c=ch y sobre la paralela se lleva la cota d; el radio de giro EI nos da los abatimientos, puntos B_o. Vemos en el dibujo tres formas de obtener la distancia d.



7.2. Proyecciones cónicas de la circunferencia situada en un plano oblicuo

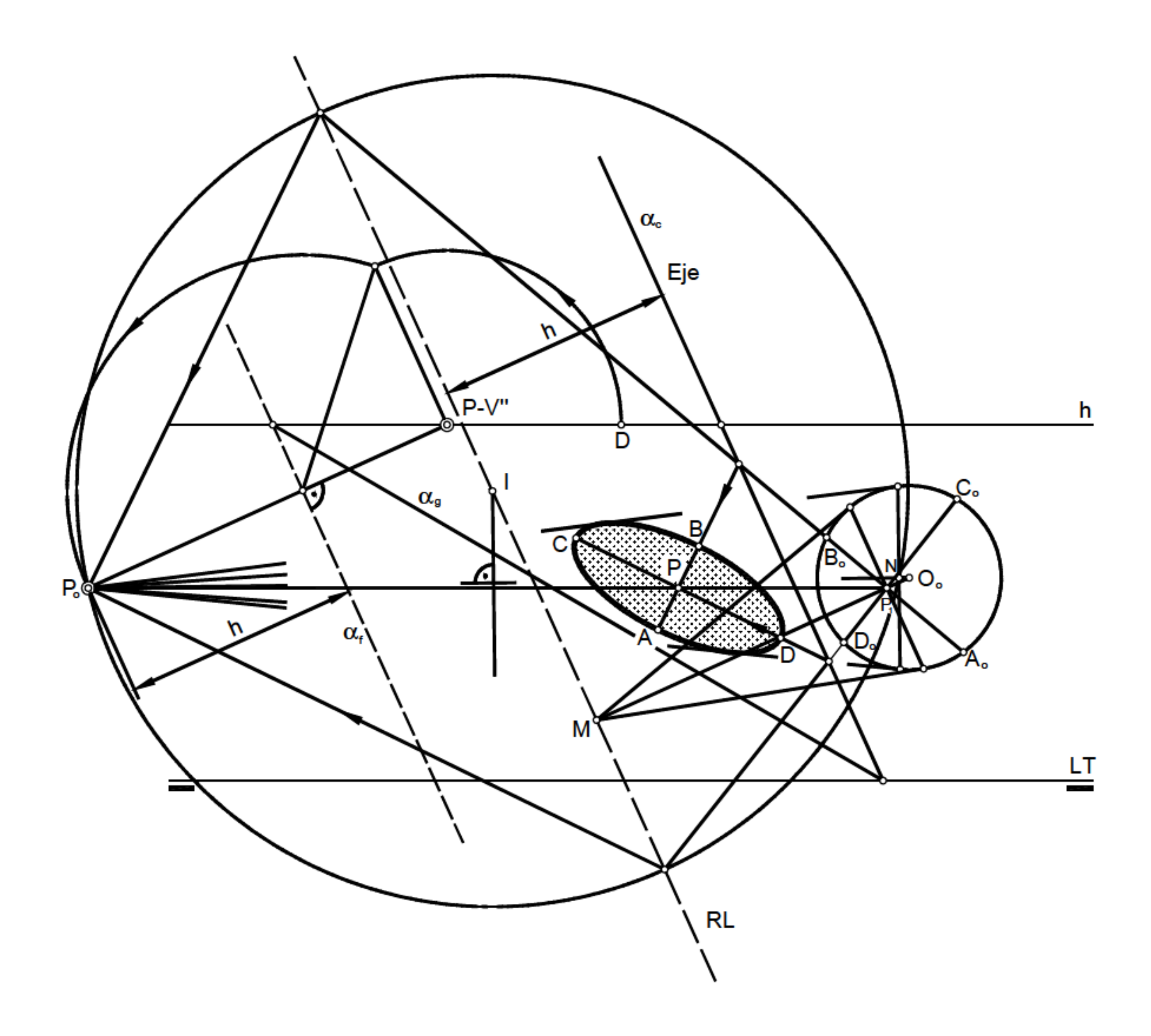
(Conviene repasar los conceptos relativos a transformación homológica de la circunferencia en elipse).

Dado α, que contiene a la circunferencia, vamos a hallar la perspectiva directa de la circunferencia.

- Eje de homología; α_c del plano.
- Recta límite; R.L., la segunda recta límite de la transformación.
- Centro de homología.; el punto P_o, abatimiento de P alrededor de α_f.

Con el conjugado armónico N del punto P_o respecto de la circunferencia y del polo P_1 de la recta límite respecto de dicha circunferencia hallamos las direcciones homólogas de los ejes de la elipse.

Los ejes son AB y CD y sus homólogos A_oB_o y C_oD_o.



7.3. Abatimiento de una figura plana

Elementos de la homología:

A y A_o; pareja de puntos homólogos.

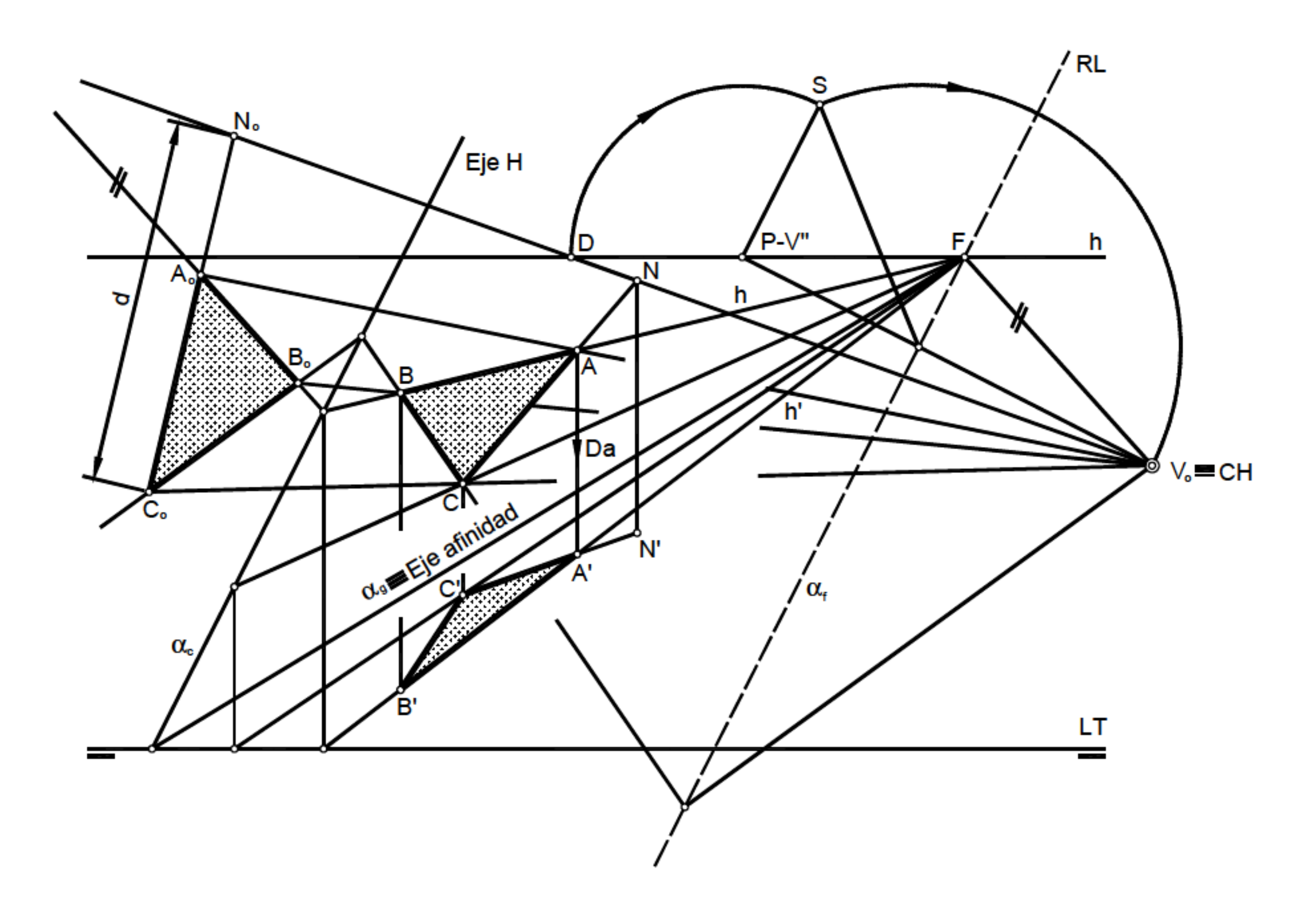
Eje de homología; la traza α_c del plano.

Recta límite; α_f, la recta de fuga del plano.

Centro de homología.; el punto de vista abatido sobre el plano del cuadro alrededor de la recta límite α_f.

El triángulo A_o-B_o-C_o es el abatimiento del triángulo que tiene por perspectivas A-B-C.

Las figuras ABC y A'B'C' son figuras afines, de eje α_g y dirección de afinidad perpendicular a las líneas fundamentales del sistema. A'B'C' es la proyección cónica de la proyección ortogonal de la figura ABC sobre el geometral.



7.4. Problema inverso del abatimiento

Dada la figura en verdadera magnitud en el plano α abatido, 1_o-2_o-3_o-4_o, vamos a hallar sus perspectivas cónicas.

Elementos de la homología:

Centro homológico; V_o.

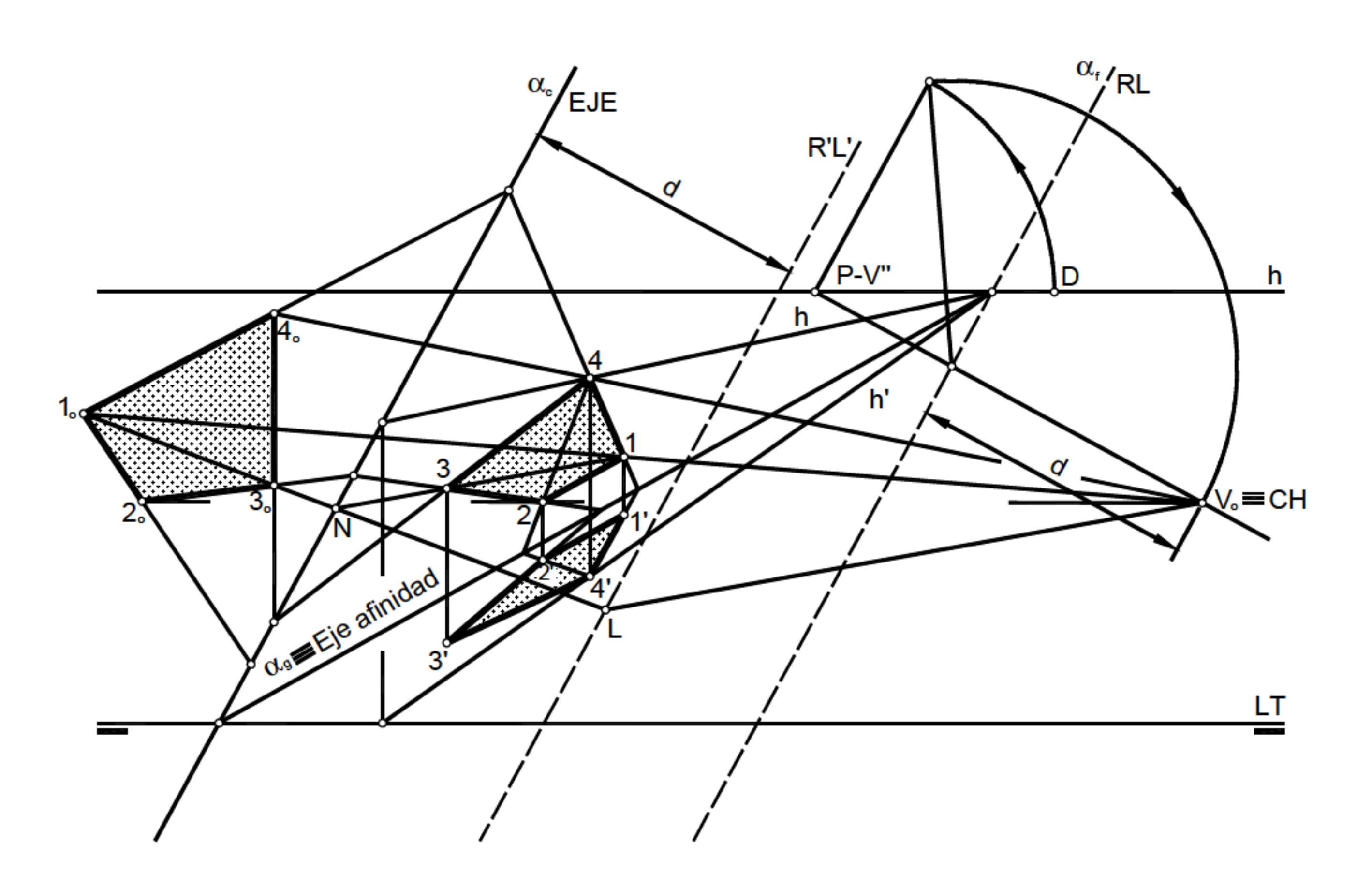
Eje de homología; traza α_c.

Recta límite; R'.L'..

Recta de fuga; $\alpha_f \equiv$ R.L. (d distancia del centro V_o a R.L.).

La recta 1_o-3_o corta en N al eje y en L a R'.L'., su homóloga pasa por N y es paralela a V_o-L, los homólogos de 1_o y 3_o son 1 y 3, en línea recta con V_o.

1'-2'-3'-4' se obtienen a partir de la perspectiva directa que es afín de ella, siendo α_g eje de afinidad. El afín de 4 es 4' que se ha obtenido por medio de la horizontal h-h'.



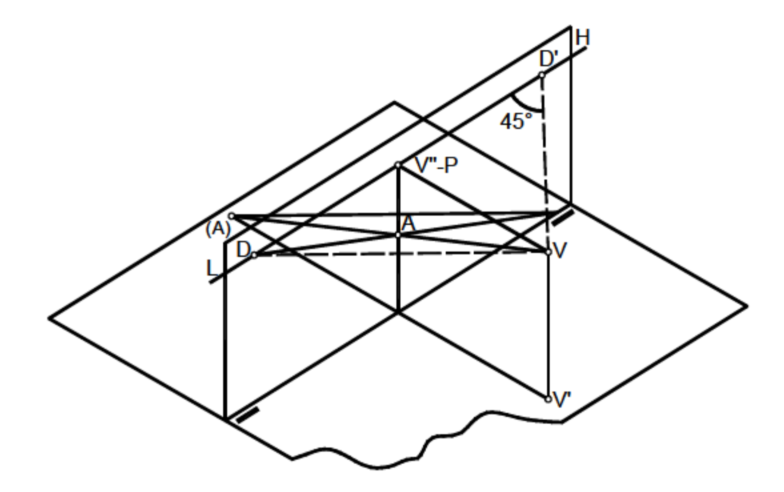
8. PERSPECTIVA CÓNICA. APLICACIONES Y MÉTODOS PERSPECTIVOS

En la perspectiva cónica se consideran principalmente dos variantes:

a) Perspectiva de frente. -Que se obtiene cuando los planos proyectantes principales del objeto son paralelos o perpendiculares a los de proyección.

b) Perspectiva oblicua. -Que se obtiene cuando dichos planos principales se hallan oblicuos respecto del cuadro.

Ambos sistemas los estudiamos seguidamente.

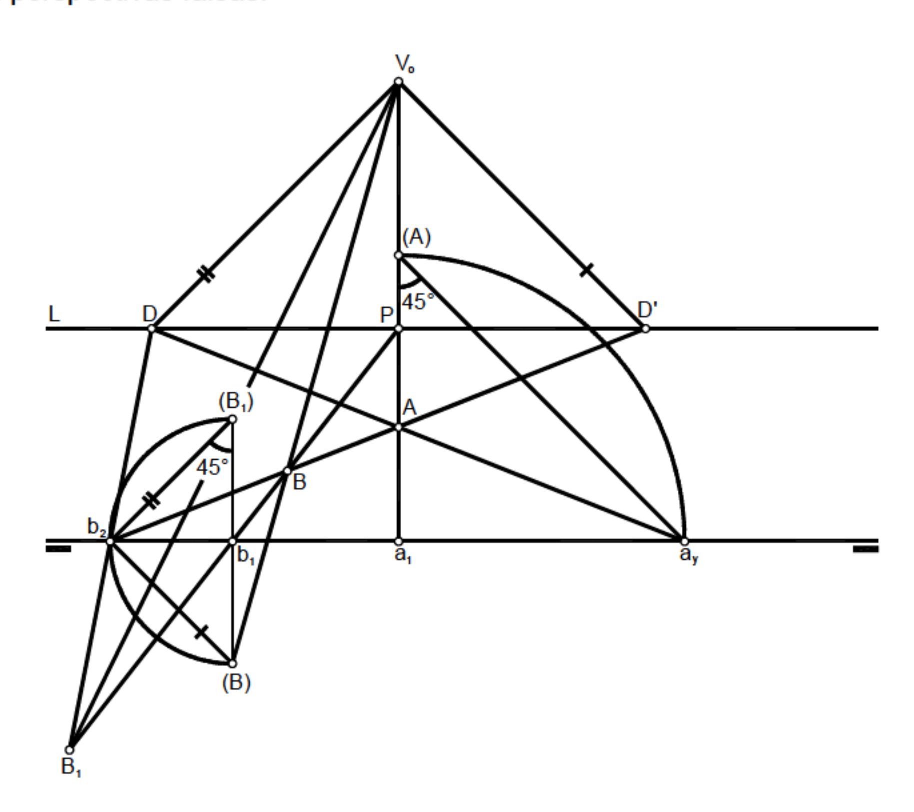


8.1. De frente

8.1.1. *Perspectiva de un punto situado sobre el plano objetivo*

Dos posiciones características (B) y (B_1) y situación de sus perspectivas.

En la figura se aprecia la correcta utilización de los puntos de distancia. Si esto no se realiza se obtendrán perspectivas falsas.

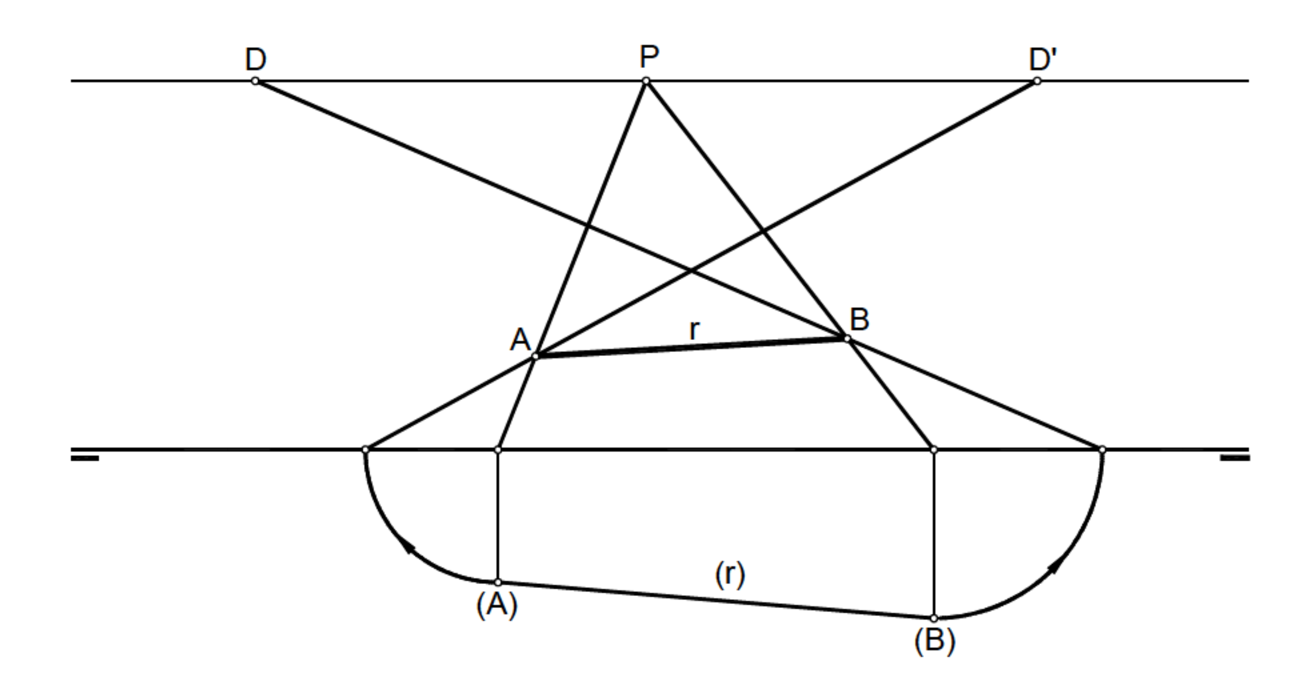


8.1.2. *Perspectiva de una recta situada sobre el plano objetivo*

Para obtener la perspectiva de la recta (r), vamos a hallar las perspectivas de dos puntos de ella. Es necesario saber que las rectas perpendiculares al plano del cuadro (en el dibujo perpendiculares a L.T.) fugan al punto principal P y que las rectas que forman 45° con el plano del cuadro (en el dibujo, que forman 45° con L.T.) fugan a los puntos de distancia D y D'.

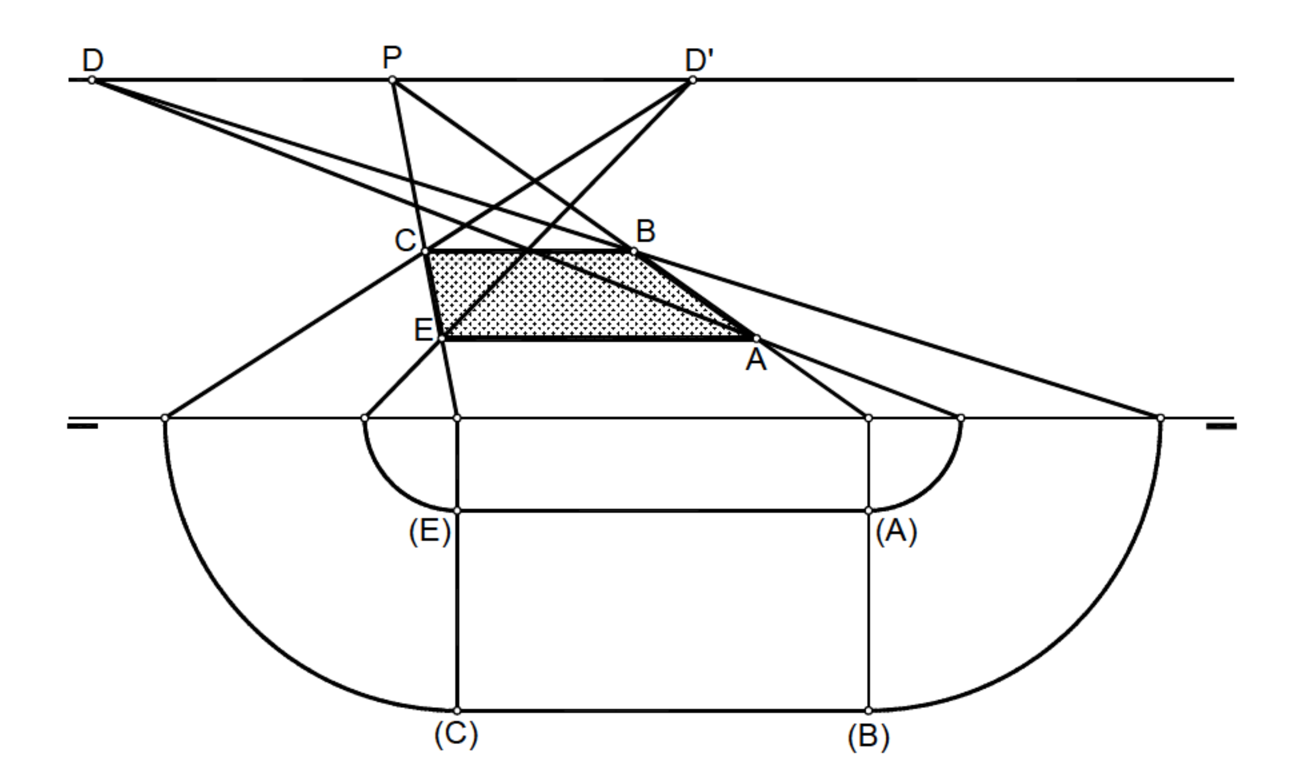
Sean (A) y (B) dichos puntos, procedemos de la siguiente forma:

Por (A) trazamos una recta que en proyección sea perpendicular a L.T: y otra que en proyección forma 45° con L.T. y que la cortan en dos puntos que uniremos con P y con D' respectivamente. Esas dos rectas se cortan en el punto A, perspectiva del punto (A). Para obtener B, perspectiva del punto (B), seguimos los mismos pasos que con el punto (A), teniendo en cuenta que ahora los puntos de fuga son P y D. Uniendo A y B obtenemos r, perspectiva de (r).



8.1.3. *Perspectiva de una figura plana de lados paralelos a la L.T.*

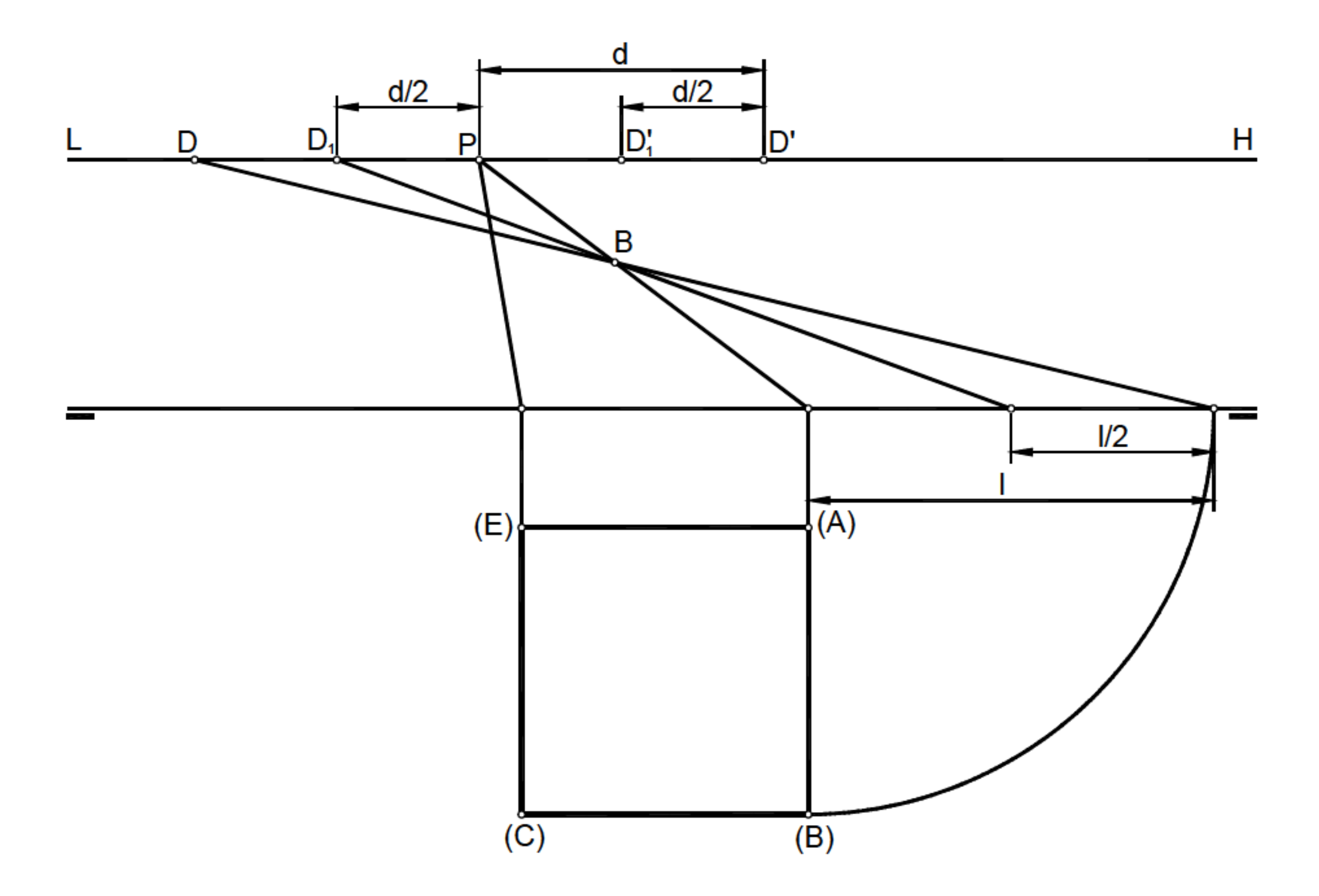
Por los puntos (A) y (B) trazamos una recta que en proyección sea perpendicular a L.T. y otras que en proyección formen 45° con L.T., que se obtienen en el dibujo mediante arcos de circunferencia. Estas rectas cortan a L.T. en tres puntos, que uniremos respectivamente con P y con D. Estas tres rectas se cortan dos a dos en los puntos A y B (perspectivas de (A) y (B)). Obtenemos las perspectivas de los puntos (C) y (E) de la misma forma que para los puntos (A) y (B). Ahora unimos A, B, C y E y obtenemos la perspectiva de la figura. Observamos que las perspectivas de los lados paralelos al plano del cuadro, también son paralelas, y se reducen, a medida que se alejan del punto de vista.



8.1.4. *Perspectiva cuando los puntos de distancia son inaccesibles*

Se toman fracciones de distancias sobre L.H. y L.T., reduciéndolas según las necesidades, a la mitad, un cuarto, etc. (los puntos obtenidos se denominan puntos de distancia reducidos; obteniéndose los mismos resultados que si de las distancias enteras se tratara.

El trazado por lo demás es idéntico al estudiado en los números anteriores.



8.1.5. *Escalas cónicas*

La perspectiva cónica se debe realizar a una escala normalizada, como sucede con los demás sistemas de representación.

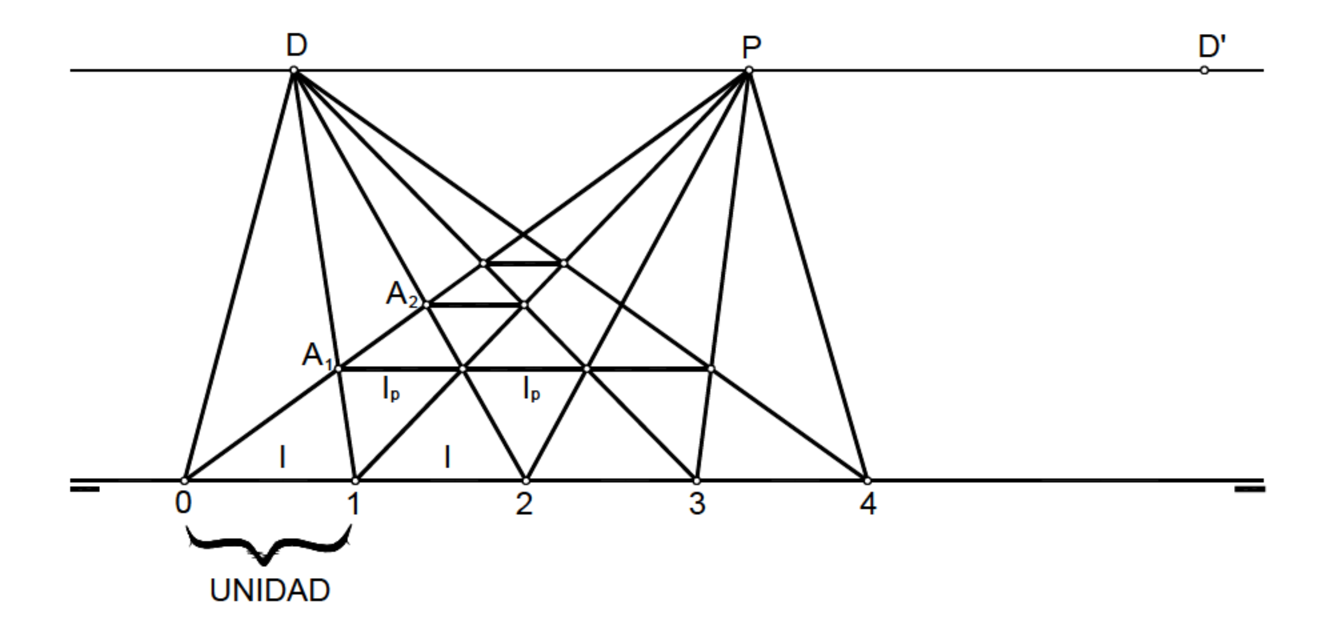
Las escalas de proporción afectan a las anchuras, alturas y profundidades de los cuerpos a representar. La aplicación de las escalas se realiza como sigue:

8.1.5.1. Escalas de anchuras-(l)(lp)

Las escalas de anchuras nos sirven para medir o situar medidas sobre líneas paralelas a L.T., sin tener en cuenta su profundidad.

Tomamos un punto arbitrario de L.T. como origen, el punto O, y a partir de él llevamos sobre L.T. unidades reales l, puntos 1, 2, 3 y 4. Uniendo estos puntos con el punto P, estas rectas cortan a cualquier recta paralela a L.T: en puntos consecutivos que distan entre sí una unidad lp, que es la unidad a la escala de proporción correspondiente.

El punto A_1 se encuentra a una unidad del plano del cuadro y el punto A_2 a dos unidades y ambos están sobre el plano geometral (para comprenderlo mejor se recomienda el estudio del apartado 8.1.5.3.).

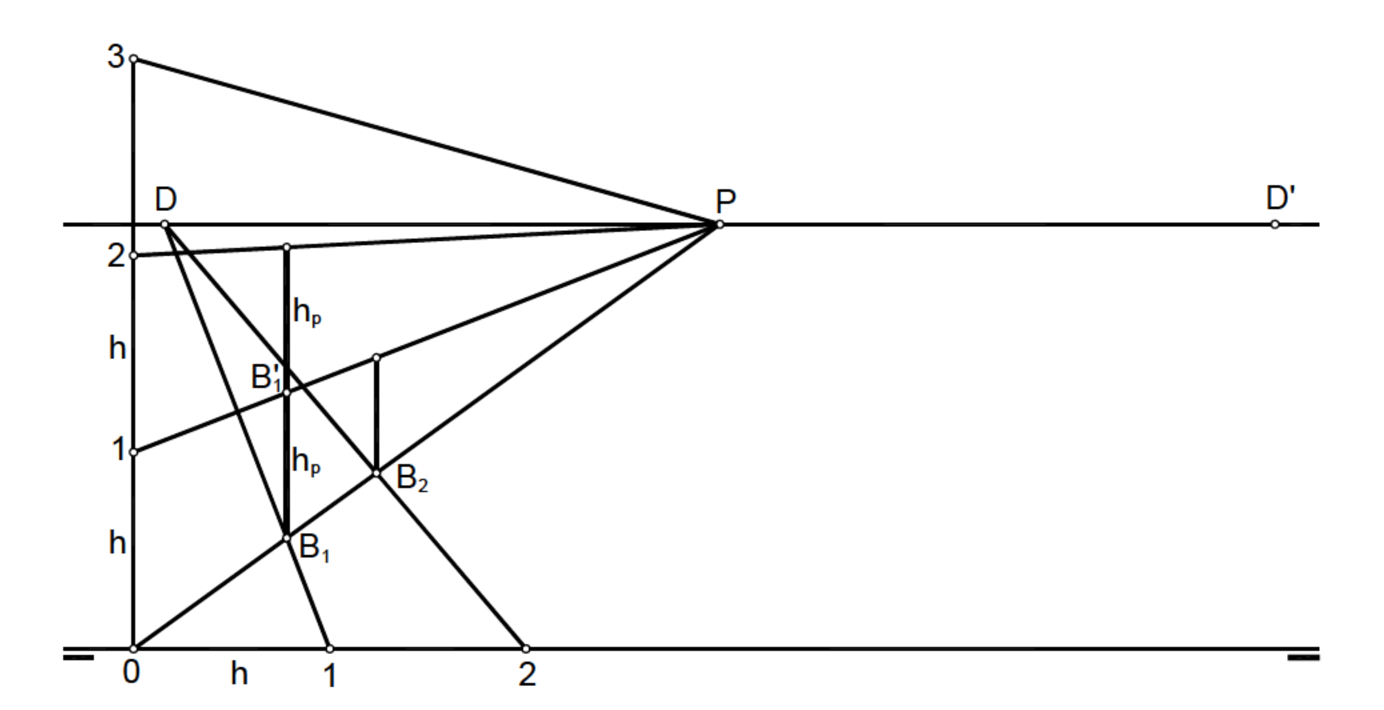


8.1.5.2. Escala de alturas-(h)(hp)

Para medir rectas verticales o llevar medidas sobre ellas, empleamos la escala de alturas.

Por un punto cualquiera de L.T., O, trazamos una recta vertical, sobre la que llevamos unidades reales h, obteniendo los puntos 1, 2 y 3, que uniremos con el punto principal P, y estas rectas interceptan a cualquier recta vertical en puntos consecutivos, cuyo segmento comprendido tiene de magnitud una unidad hp, siendo la unidad a la escala de proporción que le corresponde.

Los puntos B_1 y B_2, que se encuentran sobre el geometral, están a una y dos unidades, respectivamente, del plano del cuadro. El punto B'_1 se encuentra a una unidad del plano del cuadro y del plano geometral (para su total comprensión mirar el apartado 8.1.5.3.).



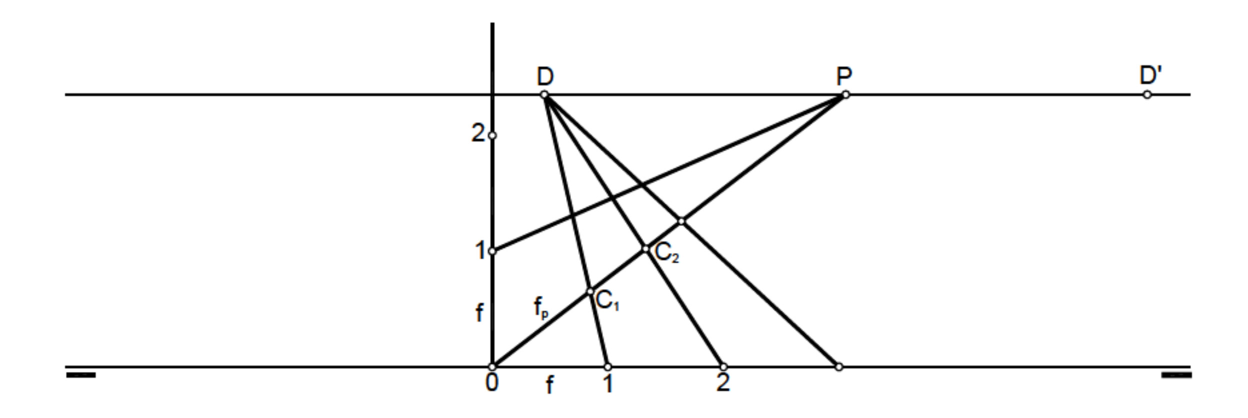
8.1.5.3. Escalas de profundidades-(f)(fp)

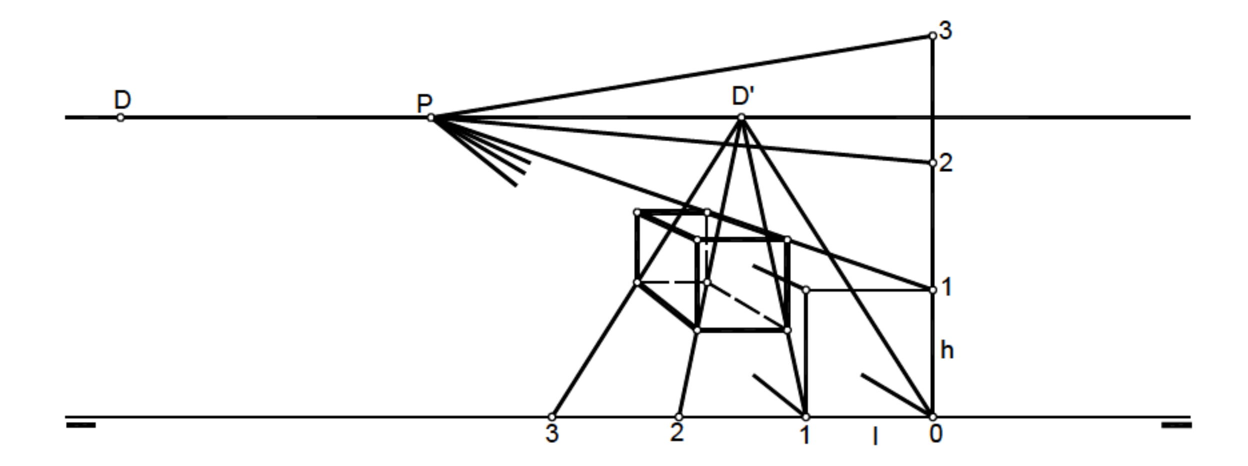
En las figuras anteriores I, h y f son las unidades reales de anchura, altura y profundidad del objeto, y lp, hp y fp, dichas unidades a la escala de proporción correspondiente.

La escala de profundidades se utiliza para medir la tercera dimensión de los cuerpos y podemos medir longitudes sobre líneas de fuga que se dirigen al infinito.

Tomamos un punto O de L.T. que uniremos con P, obteniendo la recta OP. A partir del punto O y sobre L.T. llevamos unidades reales, puntos 1, 2, ..., que uniéndolos con el punto de distancia D, nos cortan a OP en C_1, C_2, ..., que son las divisiones equivalentes a unidades representadas en profundidad.

Los puntos C_1 y C_2 están sobre el plano geometral a una y a dos unidades respectivamente, del plano del cuadro.





En la figura anterior y aplicando uno de los métodos estudiados anteriormente se ha obtenido la perspectiva del cubo unitario y alejado una unidad del plano del cuadro.

8.1.6. *Perspectivas de figuras geométricas fundamentales*

8.1.6.1. Cuadrado y circunferencia inscrita situados sobre el plano objetivo y en contacto con la línea de tierra

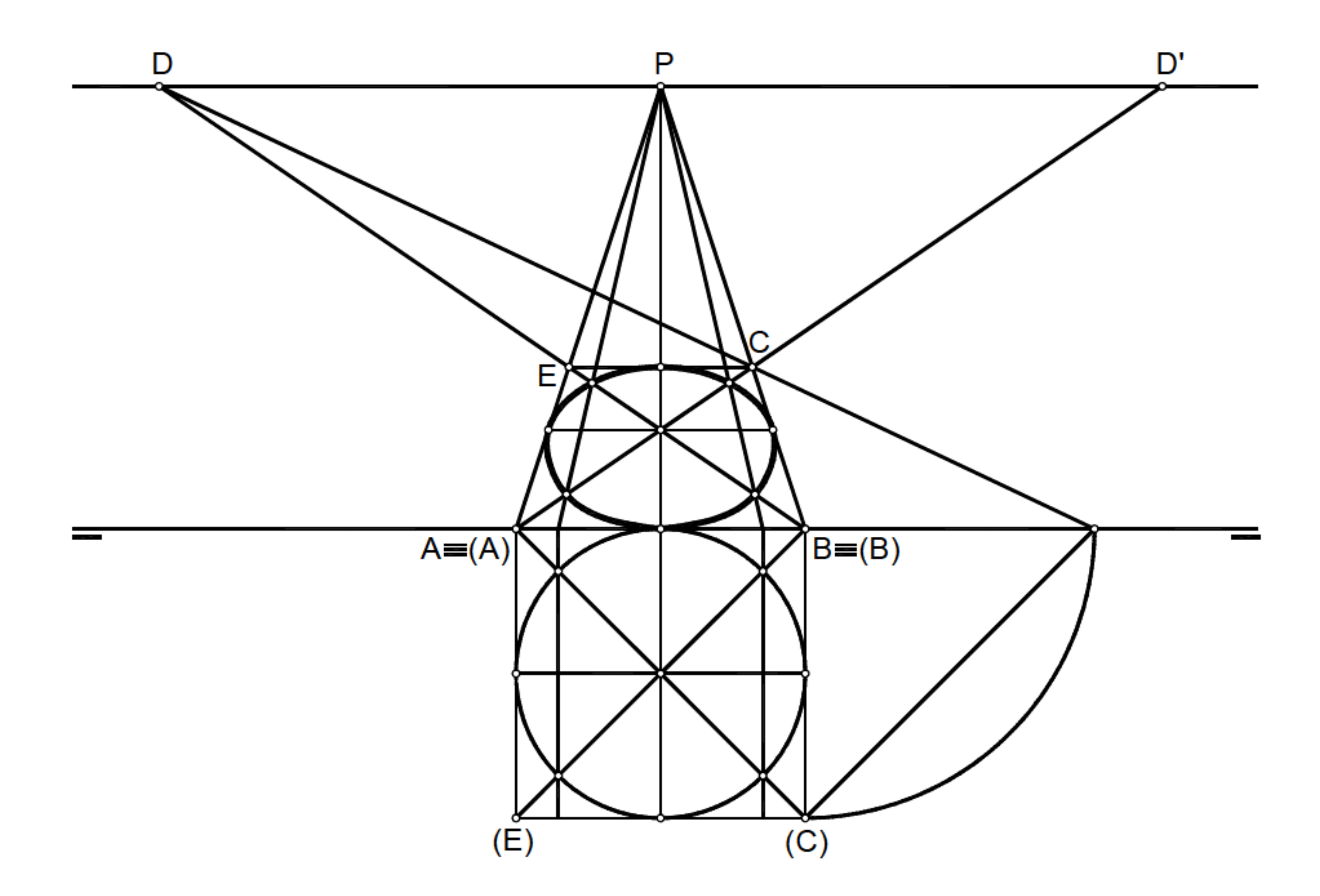
La parte de la figura que está en contacto con L.T. pertenece a la perspectiva de esa figura.

Para obtener la perspectiva del cuadrado seguimos los siguientes pasos :

Sabemos que los vértices (A) y (B) del cuadrado pertenecen a su perspectiva luego A≡(A) y B≡(B). Por el vértice (C) trazamos una recta perpendicular al plano del cuadro, que nos corta a L.T. en el punto B≡(B), que uniremos con el punto P; ahora y también por (C) trazamos una recta que forme 45° con el plano del cuadro que corta a L.T. en un punto que uniremos con D'. Estas dos rectas que fugan en P y en D' respectivamente se cortan en el punto C de la perspectiva.

Para obtener el punto E, procedemos de la misma forma, esta vez con el vértice D.

Para obtener la perspectiva de la circunferencia, se determinarán las de una serie de sus puntos, como los utilizados en la figura.

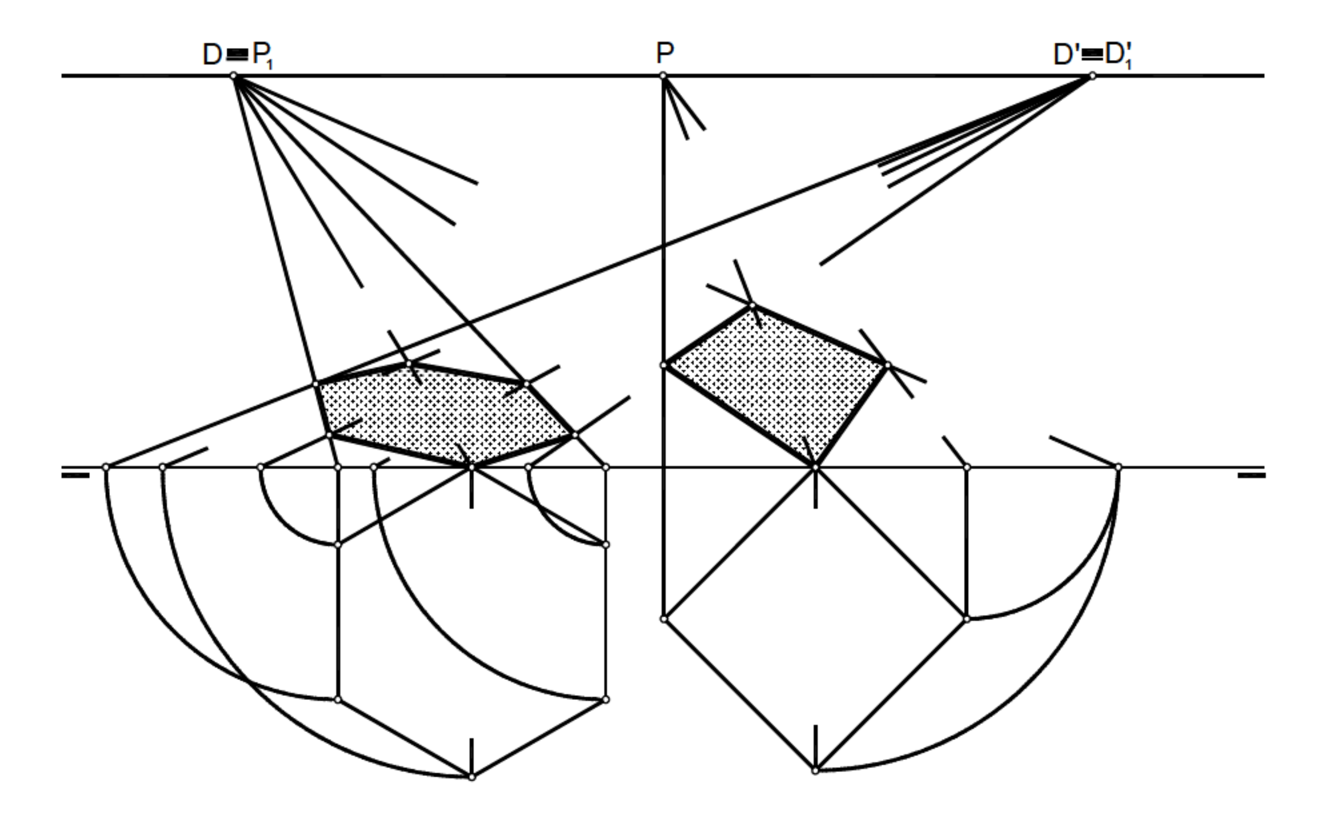


8.1.6.2. Exágono y cuadrado con un vértice en L.T. y apoyados sobre el objetivo

El vértice que tienen las figuras en L.T. pertenece también a sus perspectivas.

Para obtener la perspectiva del exágono, utilizamos como punto principal P_1 y como punto de distancia D'_1. Para el cuadrado el punto P será el punto principal y D el punto de distancia.

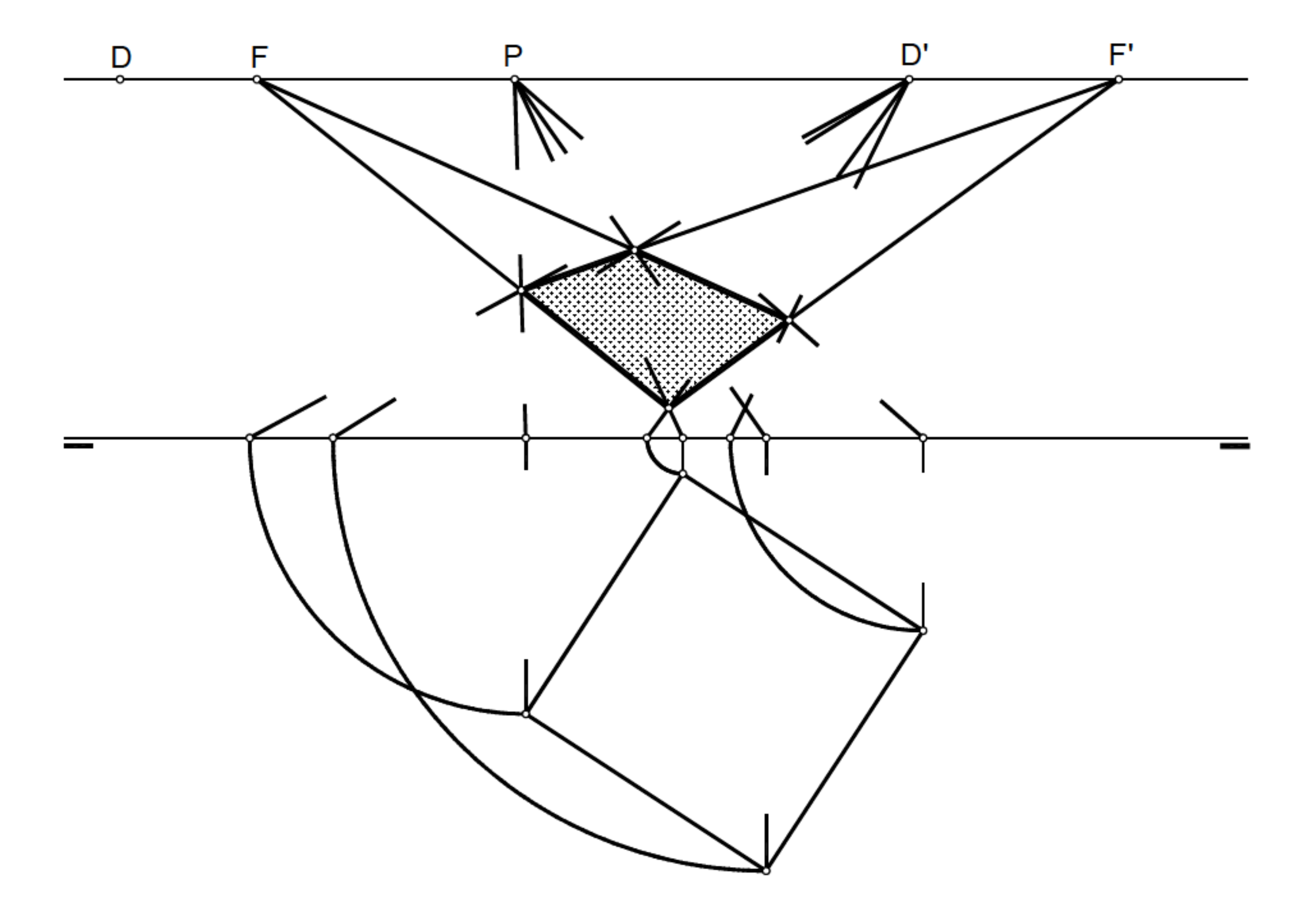
Para obtener las perspectivas de las figuras trazamos desde sus vértices rectas perpendiculares al plano del cuadro y rectas que formen con dicho plano 45°, que cortarán en diferentes puntos a la L.T., que uniremos con su punto principal o con su punto de distancia, dependiendo de cual sea su punto de fuga. Estas rectas se cortan en puntos, que son los vértices de las perspectivas de las figuras.



8.1.6.3. Perspectiva de un cuadrado situado oblicuamente a la L.T. y que se encuentra sobre el geometral

Desde los vértices de la figura trazamos rectas perpendiculares al plano del cuadro, que fugarán en el punto P y rectas que forman 45° con el cuadro y que fugarán en el punto D' y esas rectas de fuga se cortarán en los vértices de la perspectiva, que luego uniremos adecuadamente.

Obtenida la figura, se comprueba que las líneas de fuga convergen en los puntos F y F', puntos cuya determinación se puede efectuar previamente (trazado realizado en otras páginas de este tratado).



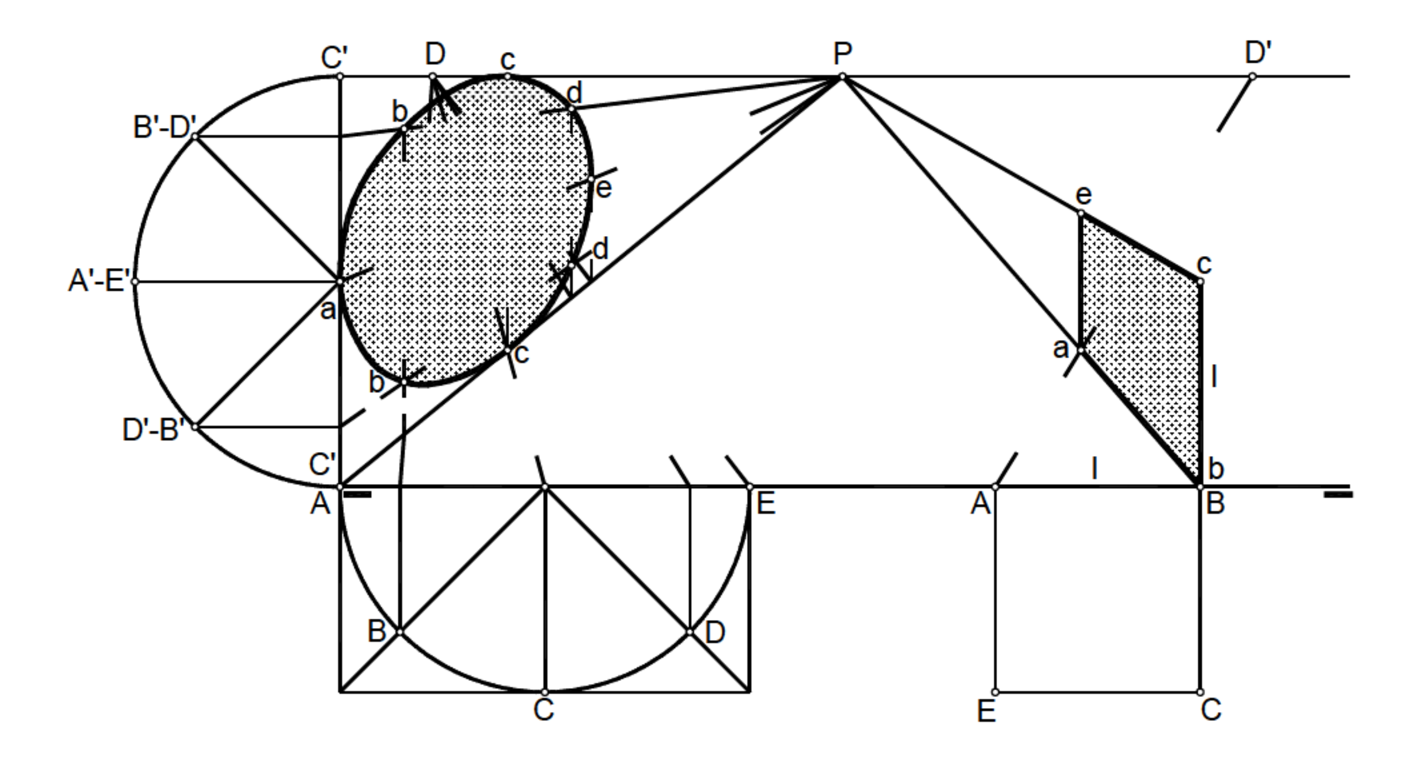
8.1.6.4. Perspectiva de circunferencia y cuadrado, ambos perpendiculares al plano objetivo

El cuadrado tiene el lado AB en contacto con él, y la circunferencia el punto C de apoyo.

Obtención de la perspectiva del cuadrado:

El punto B, que está sobre L.T. coincide con b [B=(B)=b]. El punto C se encuentra sobre el plano del cuadro, por lo que el segmento cb, perspectiva de un lado del cuadrado, tiene de magnitud l, lado del mismo. Para obtener los puntos "a" y "e" de la perspectiva, aplicamos escalas de profundidades y de alturas, encontrándose el vértice "a" sobre el geometral y a una distancia l del plano del cuadro y el vértice "e" a una distancia l del plano del cuadro y del geometral.

Para obtener la perspectiva de la circunferencia, procedemos de la misma forma que para la obtención de la del cuadrado. El punto "a" se encuentra sobre el plano del cuadro a una distancia del plano objetivo igual al radio de la circunferencia y uno de los puntos "c", el de apoyo de la circunferencia, se encuentra sobre el plano objetivo y la distancia que le separa del cuadro es la del radio de la circunferencia.

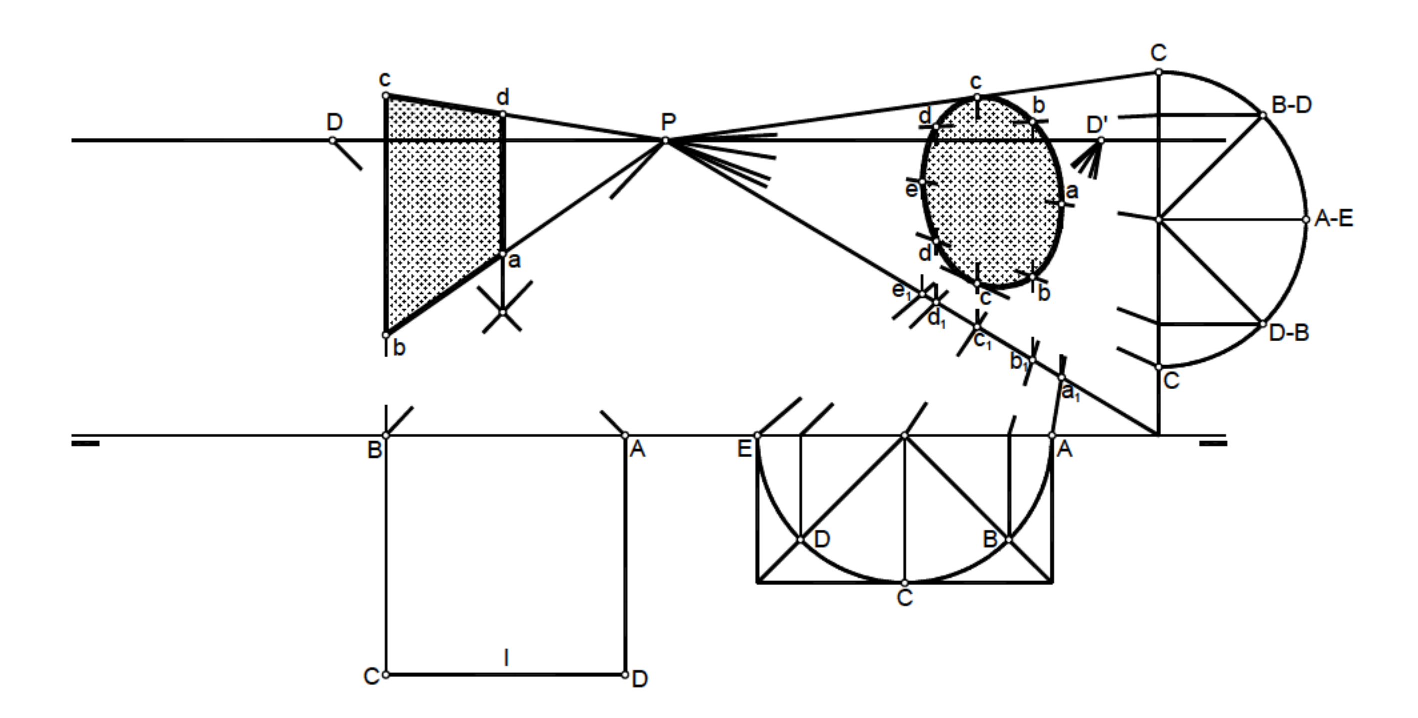


8.1.6.5. Perspectiva de cuadrado y circunferencia perpendiculares al cuadro

El lado AB del cuadrado es paralelo al objetivo, lo mismo que el diámetro AE de la circunferencia.

El lado (B)(C) del cuadrado está sobre el plano del cuadro a una determinada distancia del plano objetivo, y por lo tanto también "bc" que se ve en verdadera magnitud. Como el lado AB es paralelo al objetivo, y por lo tanto también el CD, las perspectivas de estos lados fugan en un mismo punto, el punto P, por ser además rectas perpendiculares al plano del cuadro.

Obtenemos los puntos a_1, b_1,... que se encuentran sobre el objetivo, por el método utilizado en los anteriores ejercicios. Por éstos trazamos perpendiculares a L.T. y donde corten a las rectas que fugaban en P, obtenemos los puntos a, b,... de la perspectiva de la circunferencia.



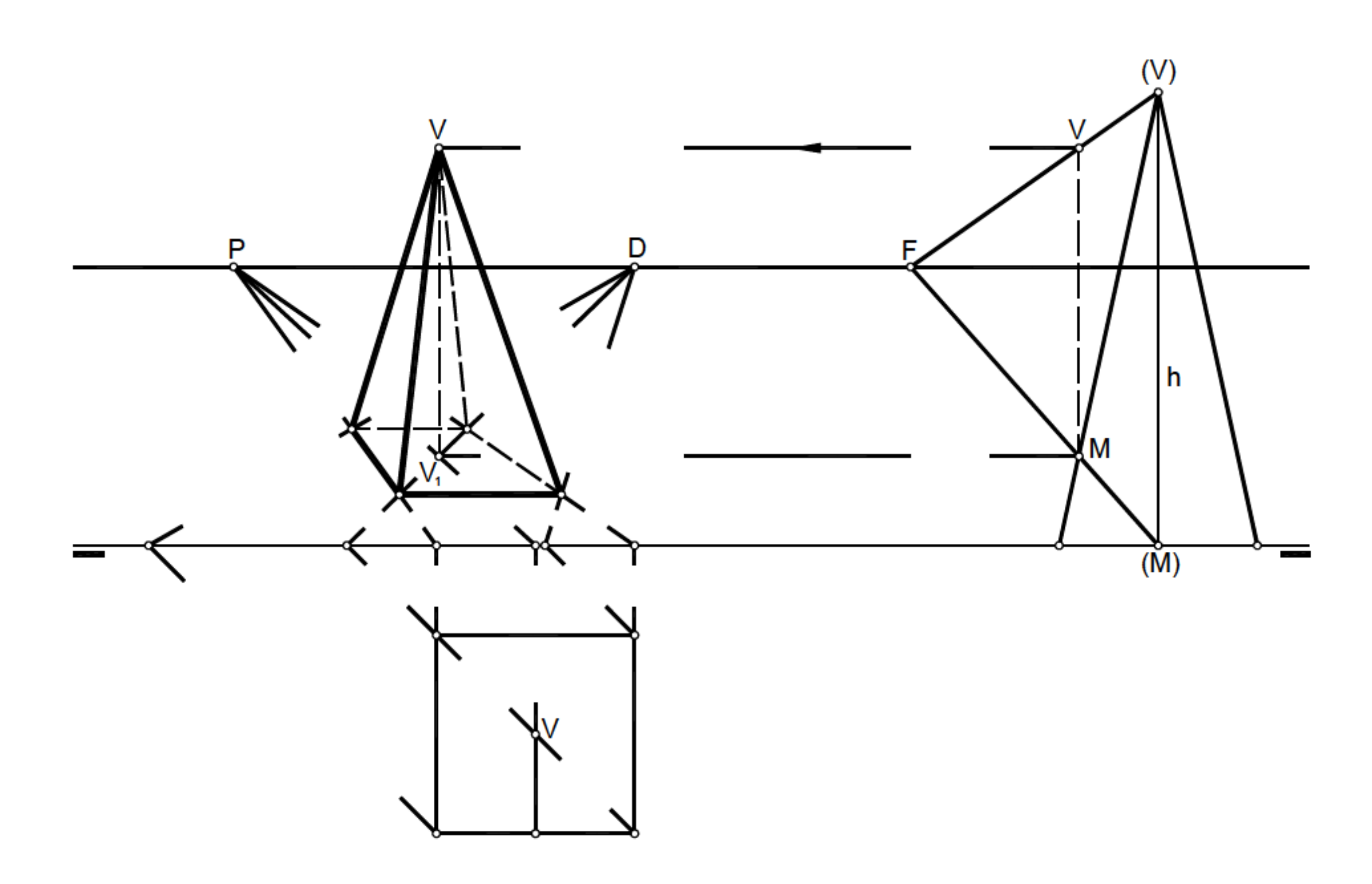
8.1.7. *Perspectiva de cuerpos*

8.1.7.1. Perspectiva de la pirámide, forma de obtener la reducción de la altura

La base de la pirámide se encuentra sobre el plano geometral y la perspectiva de la base y el punto V_1 se obtienen siguiendo el método utilizado en los ejercicios anteriores.

Para obtener la altura reducida, colocamos en una recta vertical la altura de la pirámide [(M)(V)], tomamos un punto cualquiera de L.H., por ejemplo F, que uniremos con (M) y con (V). Por V_1 trazamos una recta paralela a L.T., que nos corta a la recta (M)F. Por M trazamos una perpendicular a L.T., que corta a la recta (V)F en el punto V, siendo VM la altura reducida de la pirámide que llevaremos a partir de V_1 sobre una vertical trazada por V_1, obteniendo el punto V, el punto de la perspectiva que nos faltaba.

La reducción perspectiva de la altura de la pirámide puede también realizarse directamente sobre la recta que la contiene.

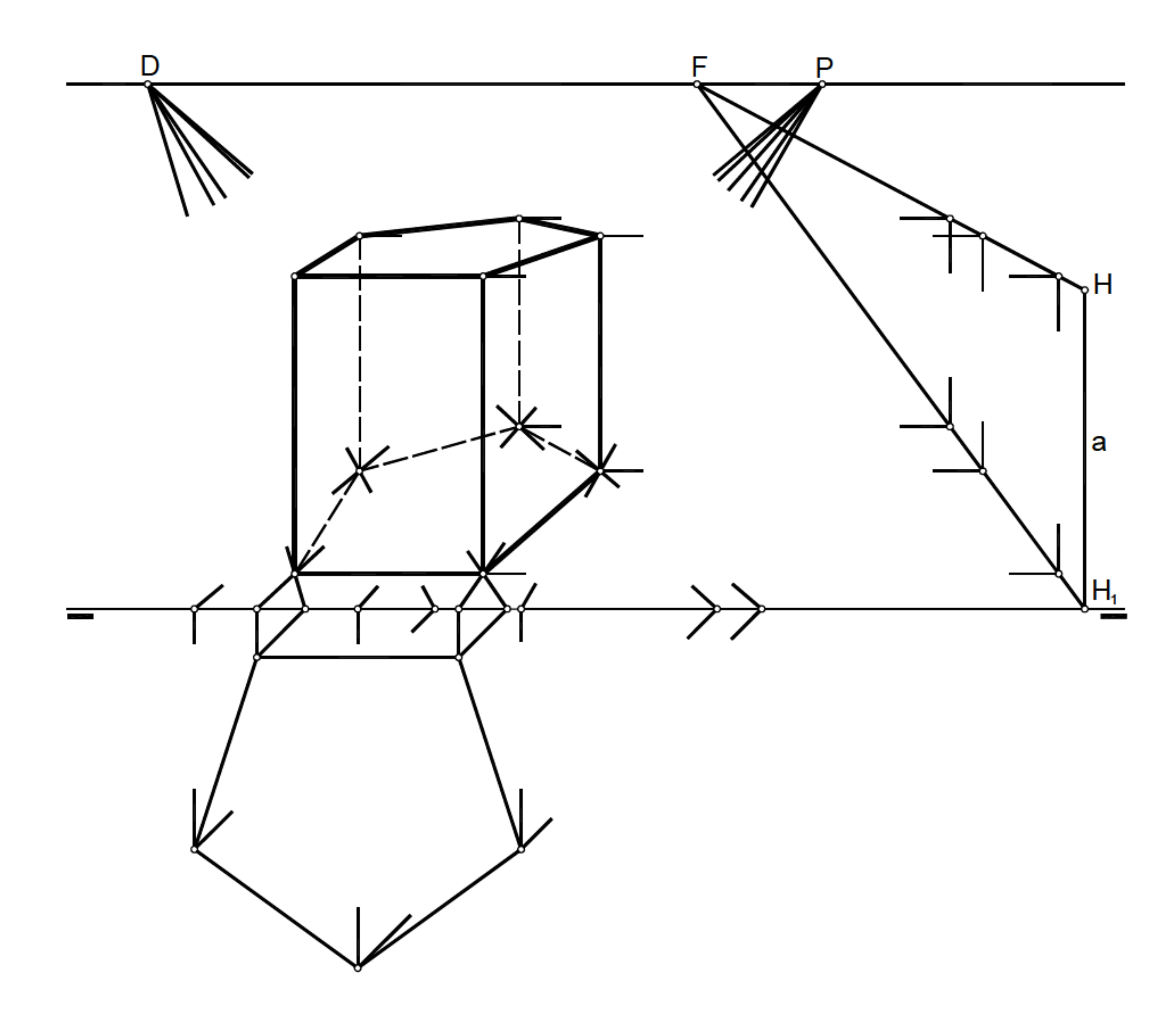


8.1.7.2. Prisma pentagonal regular

El prisma tiene la base apoyada sobre el plano geometral. Obtenemos la perspectiva de la base mediante rectas que en proyecciones son perpendiculares a L.T. y rectas que en proyecciones forman 45° con L.T. que fugarán respectivamente al punto P y al punto D.

Por los vértices de la perspectiva de la base trazamos rectas verticales y sobre ellas llevaremos las alturas reducidas.

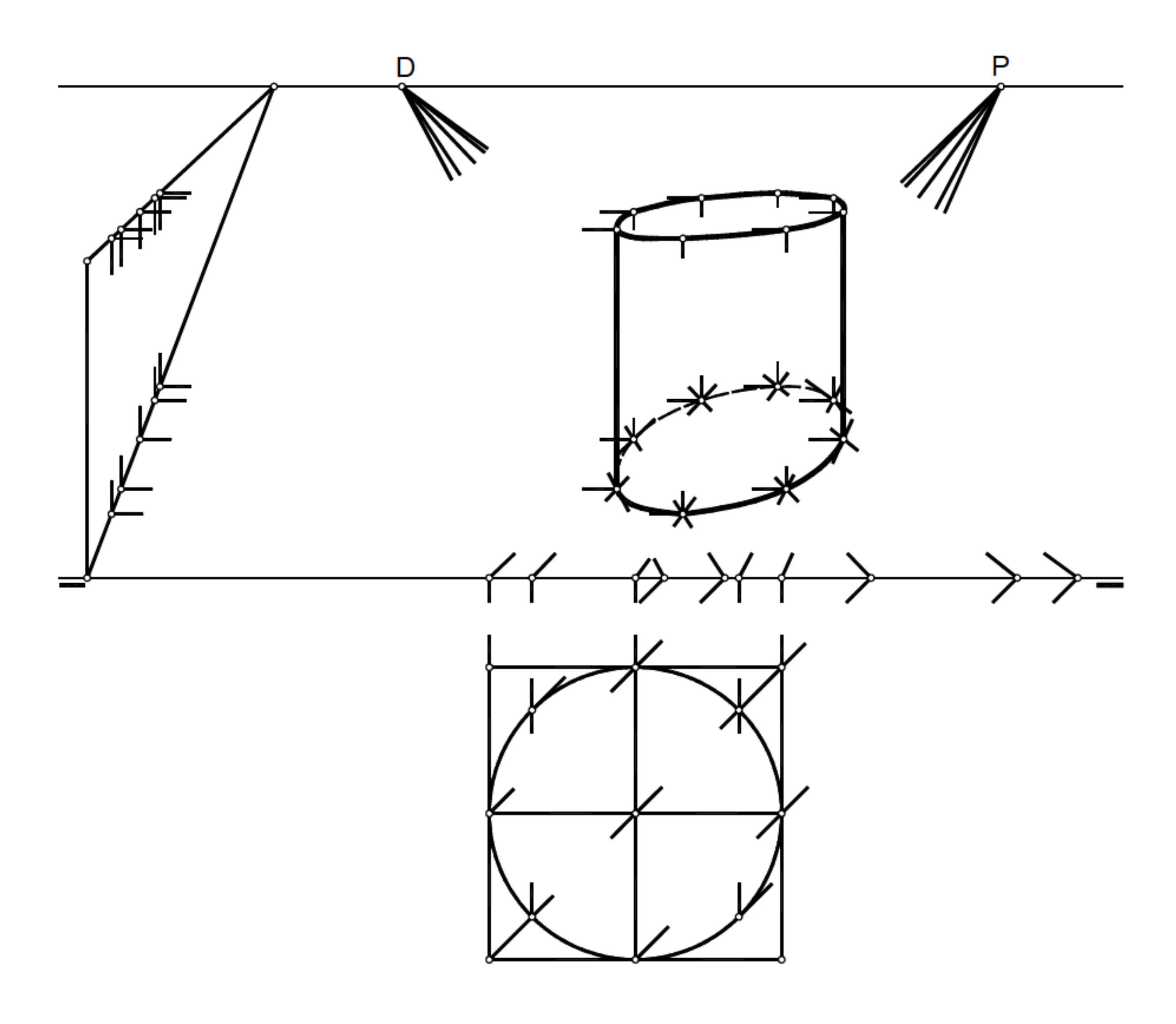
Para reducir las alturas, trazamos una recta vertical, que en proyección es perpendicular a L.T. sobre la que llevamos, a partir de L.T., un segmento de longitud igual a la arista lateral del prisma. Unimos los dos extremos del segmento con un punto F, arbitrario, de la L.H. y por los vértices de las perspectiva de la base, trazamos rectas paralelas a L.T., que cortarán a la recta FH_1 y por esos puntos de corte trazamos perpendiculares a L.T. que cortan a la recta FH y esos segmentos, perpendiculares a L.T., comprendidos entre las rectas FH_1 y FH son las alturas reducidas.



8.1.7.3. Cilindro recto

La base del cilindro se encuentra en el plano geometral y obtenemos la perspectiva de la base tomando varios puntos de la circunferencia y empleando rectas que fugan a los puntos principal y de distancia.

Una vez obtenida la base, pasamos a obtener las alturas reducidas y para ello sobre una vertical colocamos la altura del cilindro y procedemos como en los ejercicios anteriores.

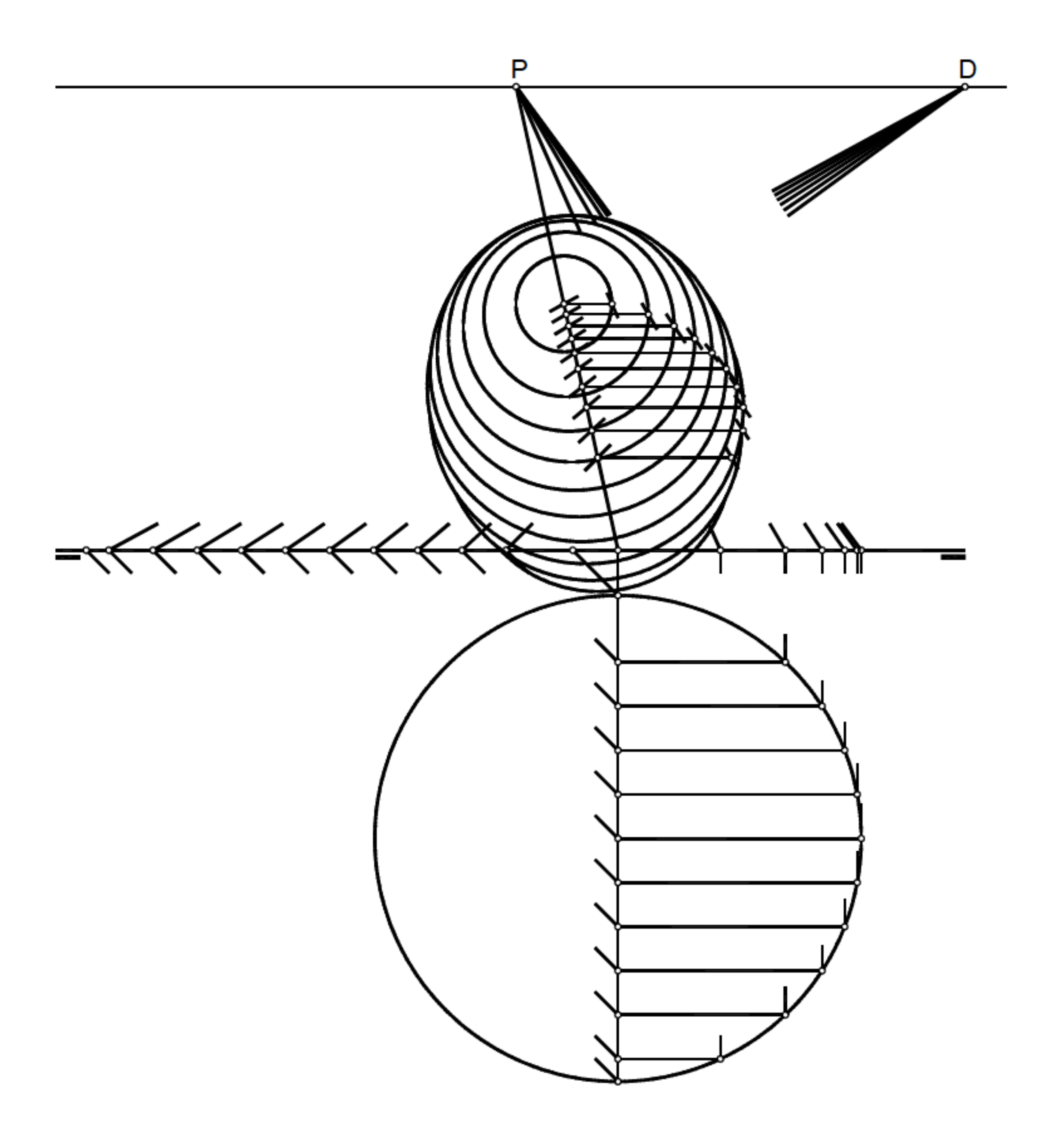


8.1.7.4. Perspectiva de la esfera

La esfera tiene su eje sobre el plano geometral.

Para su representación se secciona la esfera por planos paralelos que producen secciones circulares.

Se obtiene la perspectiva del diámetro con sus puntos de división correspondientes. Establecidas las posiciones y reducciones de los centros y radios respectivos de las secciones, se trazan éstas y la curva envolvente nos proporciona la perspectiva de la esfera.



8.2. Perspectiva oblicua

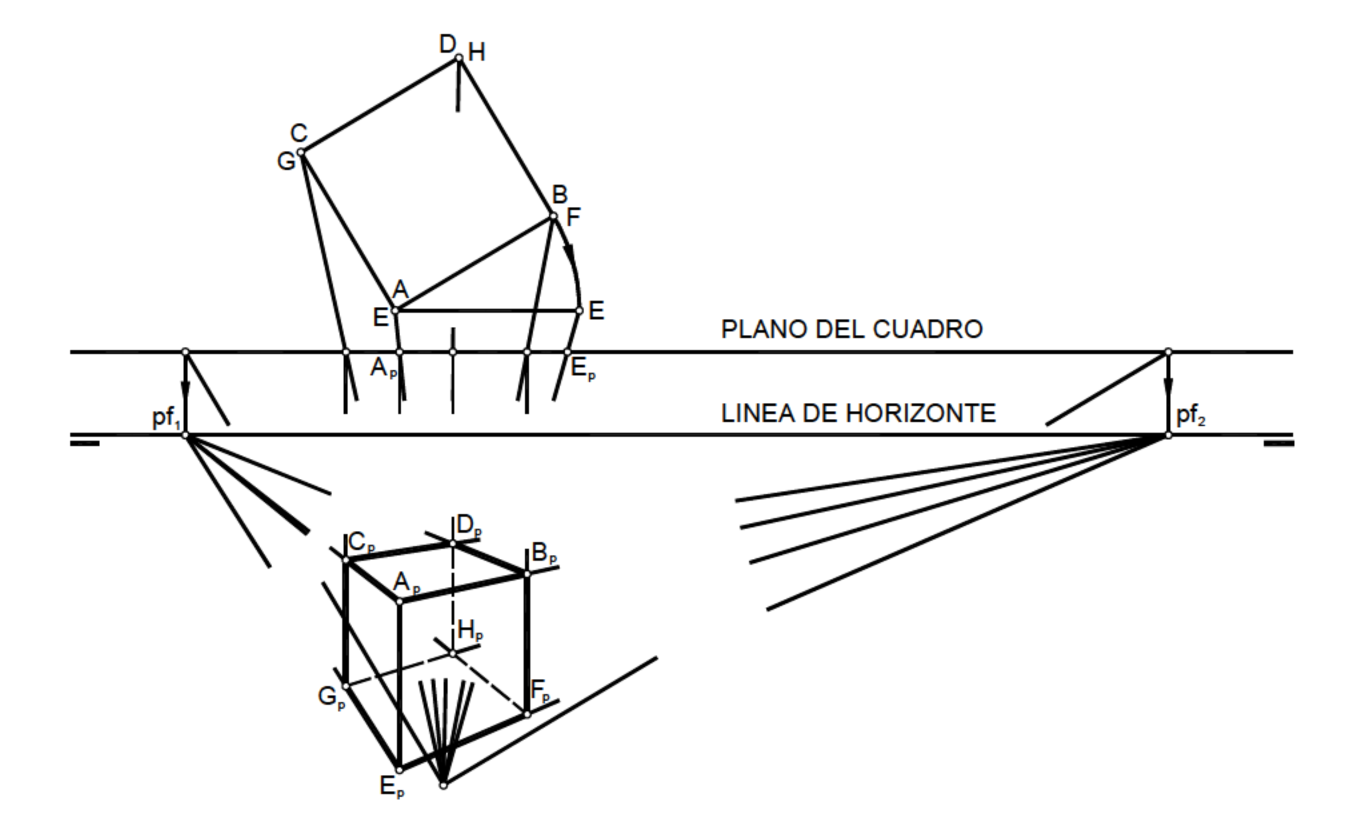
Para el trazado de la perspectiva oblicua se siguen varios métodos; los que estudiamos en páginas sucesivas son los de más fácil comprensión, y por lo tanto los de mayor utilización práctica.

Pretenden ser estos apuntes resumidos una iniciación en el estudio de dichos métodos, que habrá de completar a medida que las dificultades prácticas de su aplicación lo vayan requiriendo.

9. MÉTODOS PARA EL TRAZADO DE LA PERSPECTIVA OBLICUA

9.1. Método de las proyecciones visuales

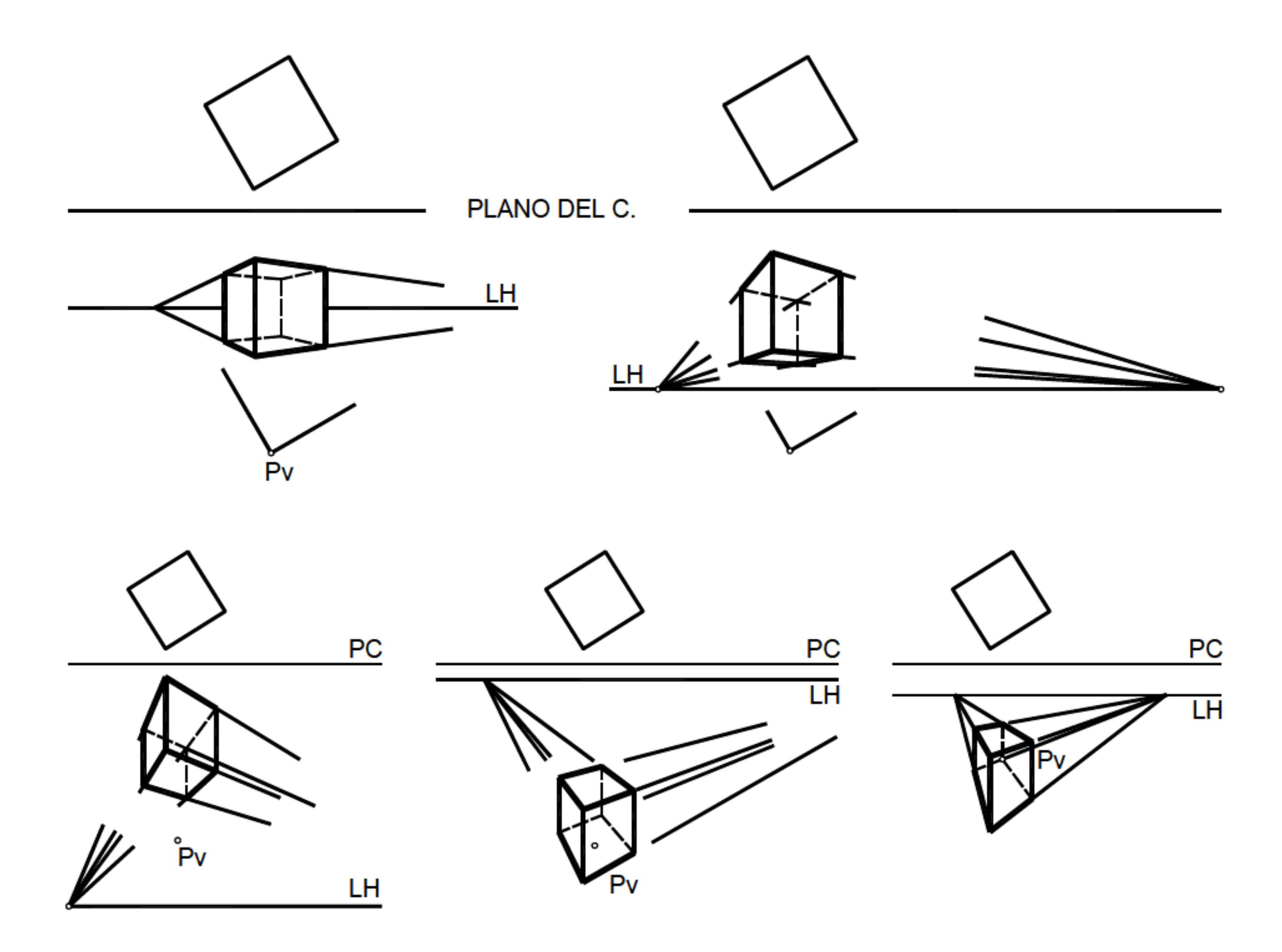
Como aplicación de este método vamos a obtener la perspectiva de un cubo. El procedimiento que vamos a seguir está explicado en la página197.



*.- Efectos que se consiguen. Según la posición relativa entre el objeto, línea de horizonte, punto de vista.

Para conseguir una representación agradable, es conveniente que el rayo principal esté, centrado respecto del cuerpo proyectante, que el ángulo de proyecciones visuales extremas esté comprendido entre 30 y 60 grados y que la distancia desde el punto de vista al plano del cuadro sea de 1.6 a 2 veces la anchura del cuerpo proyectante.

En caso de ser el cuerpo a representar de formas especiales, no suficientemente definido por la proyección horizontal de su planta, es preciso la utilización del alzado y la forma de trabajo la veremos en figuras que representaremos a continuación.

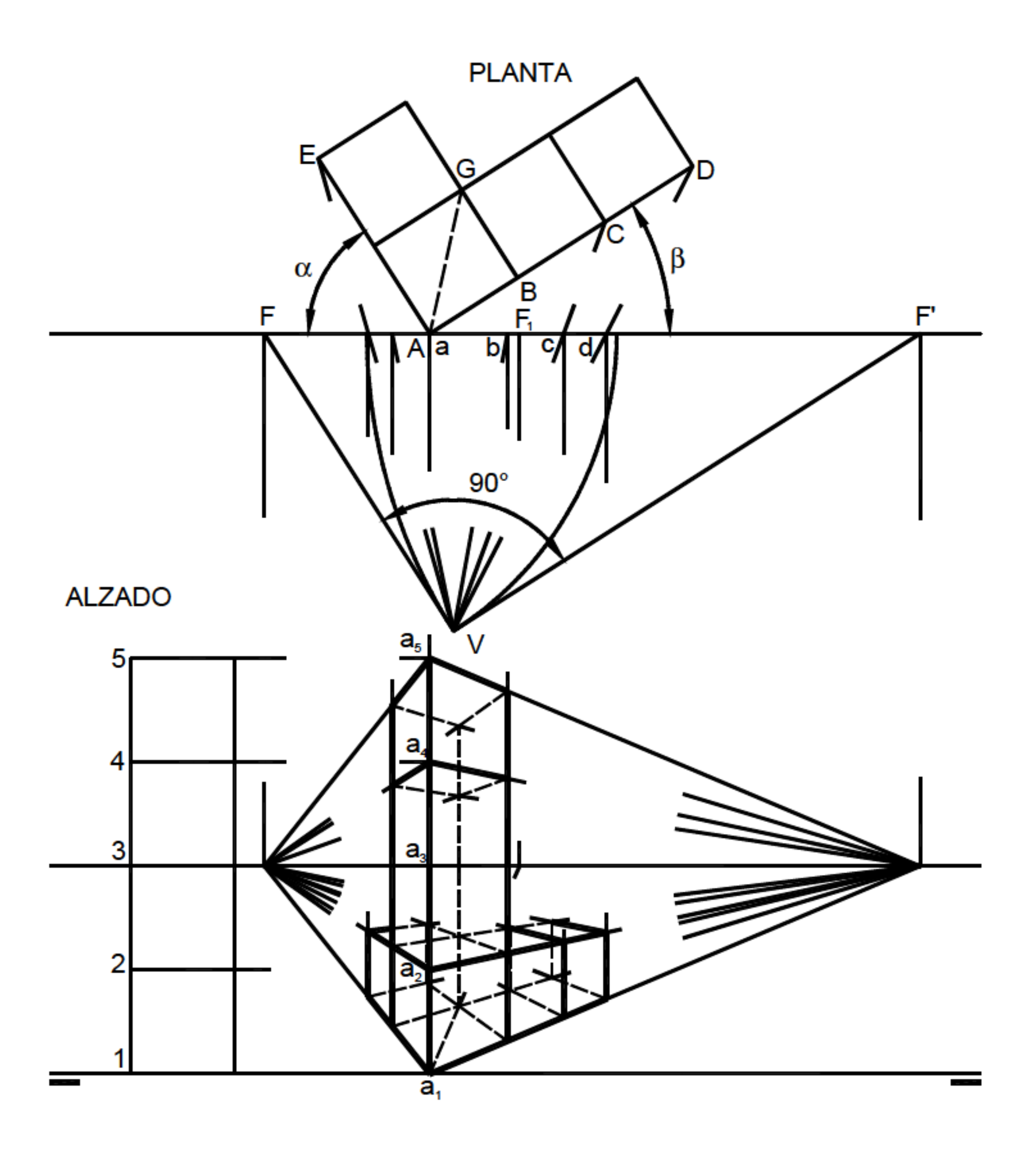


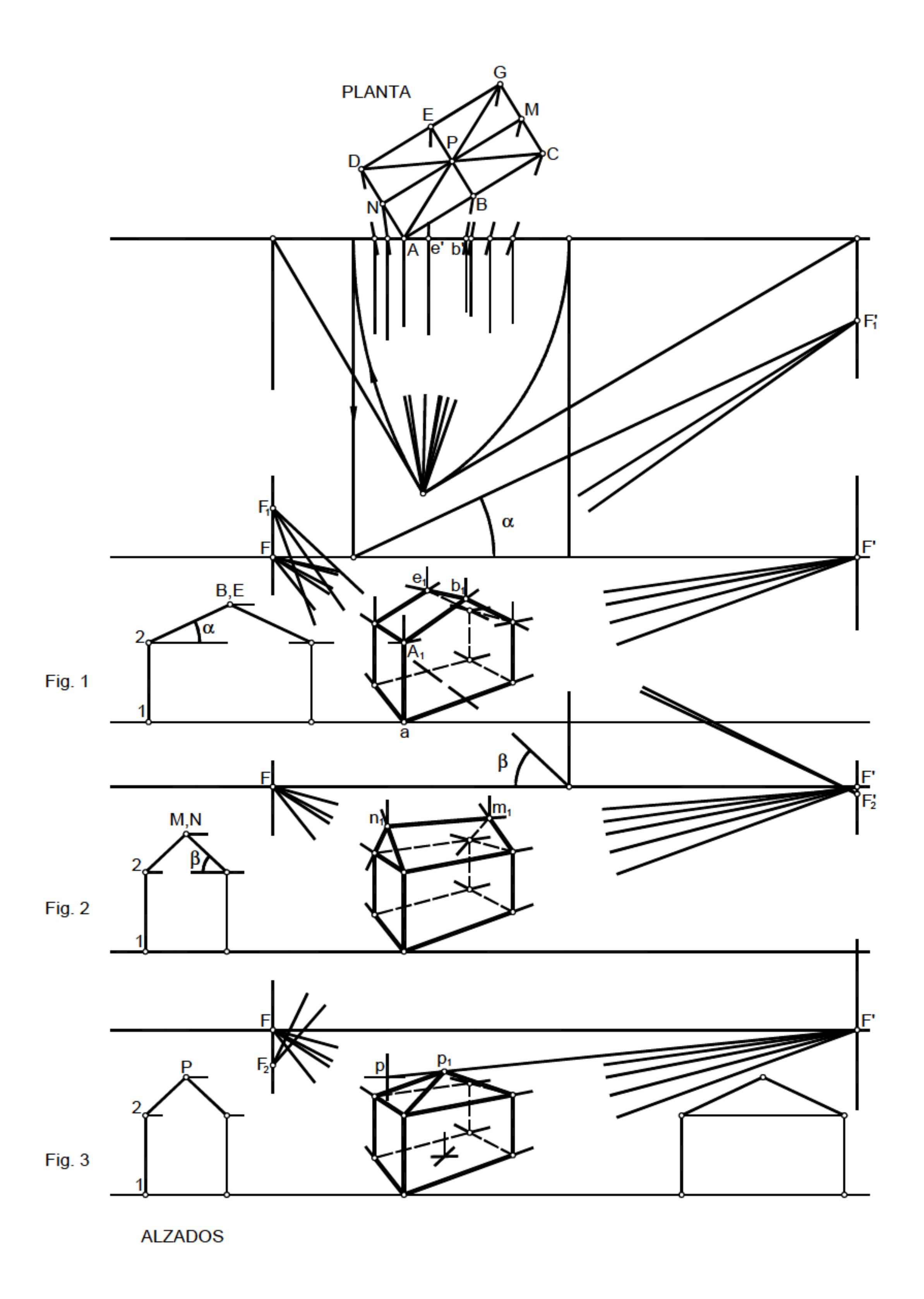
*.- PROCEDIMIENTO.

Se trazan los rayos visuales desde V a los puntos del objeto representados en planta A, B, C, D, E determinando sobre el cuadro los punto a, b, c, ...

Se trazan desde V paralelas a los lados AD y AE de la planta, obteniendo sobre el cuadro los puntos de fuga F y F'. Con la paralela la diagonal AG se obtiene el de fuga secundario F_1. Se procede de igual forma para todo grupo de paralelas existentes. Obtenemos sobre el plano del cuadro los puntos de fuga F, F' y el punto de fuga secundario F_1, mediante perpendiculares referimos esos puntos a L.H..

Dispuesto el alzado, se llevan los puntos considerados importantes 1, 2, 3, .. sobre la vertical que se halla sobre el cuadro, obteniendo los puntos a_1, a_2, a_3, ... de la perspectiva correspondientes al vértice A de la planta. Desde F y F' se trazan líneas de fuga que pasen por los puntos a_1, a_2, a_3, ... determinando así la perspectiva de las aristas. El punto F_1 sirve de elemento auxiliar para el trazado o comprobación. Modificando el valor de los ángulos α y β varía la posición de las caras laterales, su deformación dependerá, como se desprende de las figuras de la página anterior, de la posición relativa entre PV y PC.




PLANTA
G
E
M
P
D
C
N
B
A
e'
b'
F_1'
F_1
α
F
F'
B,E
e_1
b_1
2
α
A_1
1
a
Fig. 1
β
F
F'
F_2'
M,N
n_1
m_1
2
β
1
Fig. 2
F
F'
F_2
P
p
p_1
2
1
Fig. 3
ALZADOS

Cuando en los cuerpos existan planos oblicuos o líneas ascendentes y descendentes, sucede que las rectas paralelas correspondientes a planos oblicuos, tienen su punto de concurrencia por encima de la L.H. si son líneas ascendentes y por debajo si son descendientes, pero siempre sobre la vertical que pasa por F o F' .

F'_1 y F'_2 serán simétricos respecto de F' si los planos oblicuos tienen la misma pendiente.

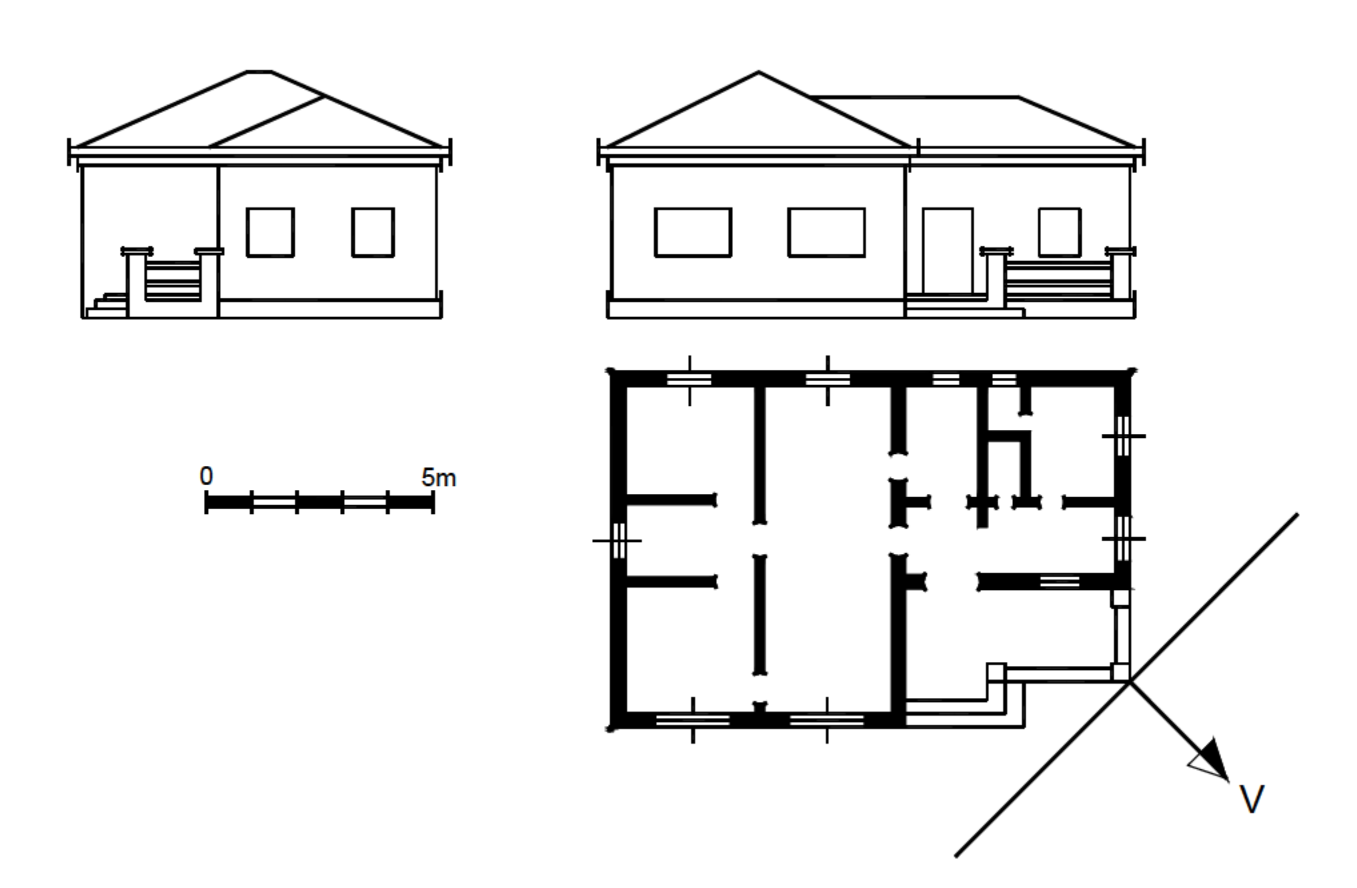
En las representaciones de la página anterior se realiza la obtención perspectiva de vertientes concurrentes en línea., figs.1 y 2 y en vértice, fig.3.

En la primera figura, para obtener la cumbrera BE se proyecta el punto B sobre la vertical tangente al cuadro que pasa por el punto A, obteniéndose el punto b, el cual se une con F', determinando por su intersección con la vertical que procede de b' el punto b_1 (perspectiva de B).

b_1 se une con F y en su intersección con la vertical que procede de e', se encuentra el punto e_1 (perspectiva de E).

En las figuras 2 y 3 se han realizado trazados similares para obtener la cumbrera n_1m_1 y el vértice p_1 de vertientes triangulares concurrentes en él.

Aplicación: Se pide dibujar la perspectiva cónica del presente edificio. Deben respetarse las construcciones auxiliares, regruesando el resultado final.

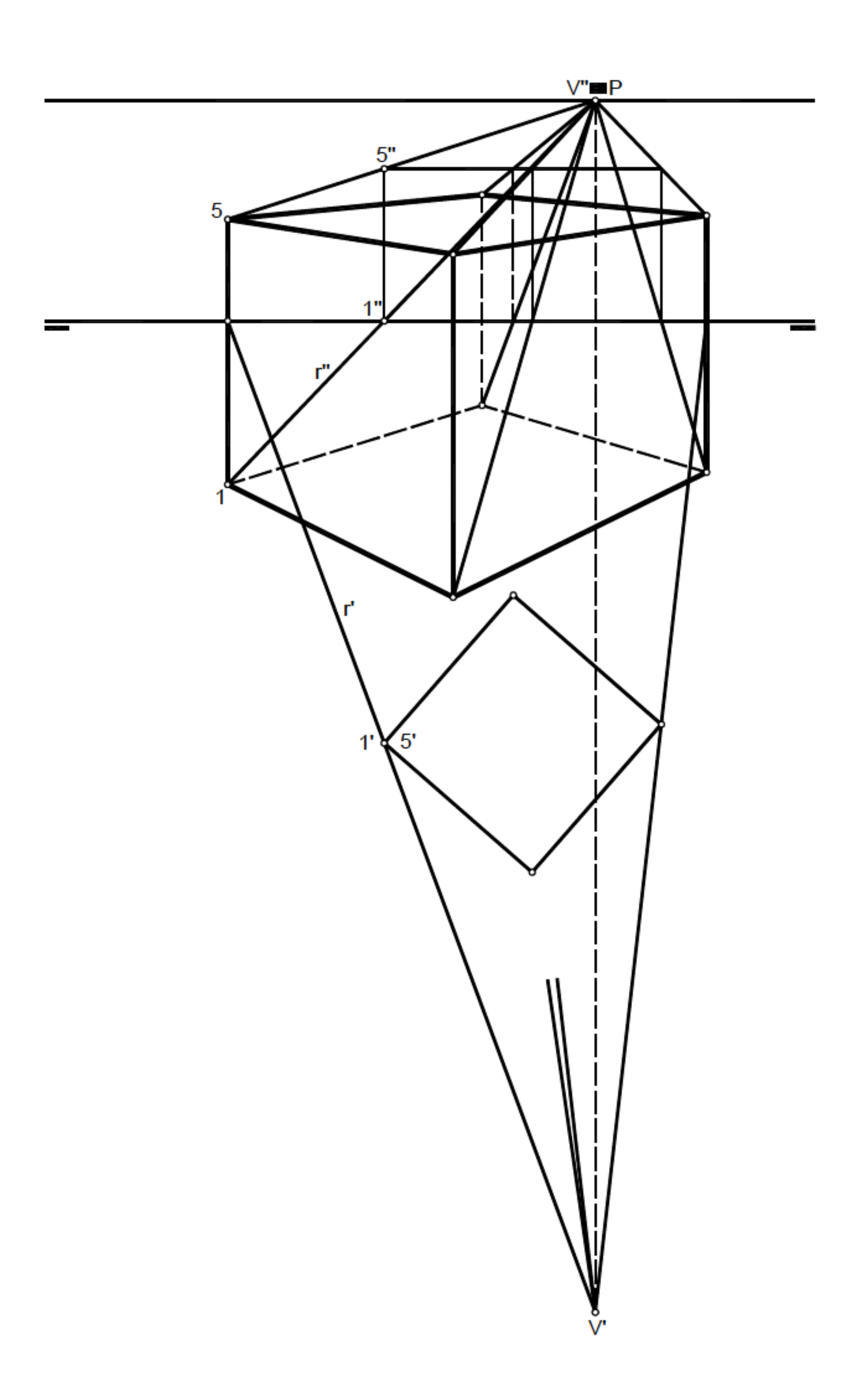


9.2. Método de las trazas

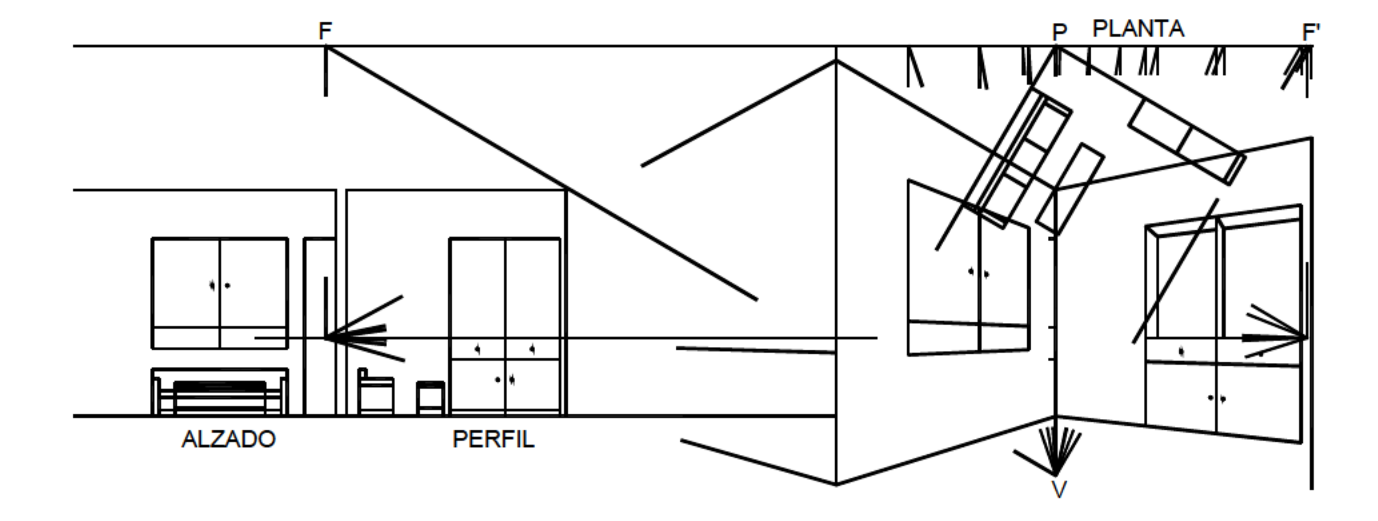
Se hace coincidir el cuadro (π) con el PV diédrico, y se determinan las trazas verticales de los rayos que parten de V y pasan por los puntos del objeto.

Partiendo de las proyecciones diédricas de un cubo, obtenemos su perspectiva cónica.

La recta r (r'-r") es el rayo visual que parte de V y pasa por el vértice 1 (1'-1") del cubo. Su traza vertical será la proyección cónica de dicho punto.



En el presente trazado se realiza la perspectiva de un interior representando previamente según sus proyecciones ortogonales, el procedimiento a seguir es el método de las proyecciones visuales. Se ha evitado algún motivo del interior con el fin de no recargar la figura, de la que no se ha eliminado ningún trazado auxiliar.



9.3. Punto de fuga reducido

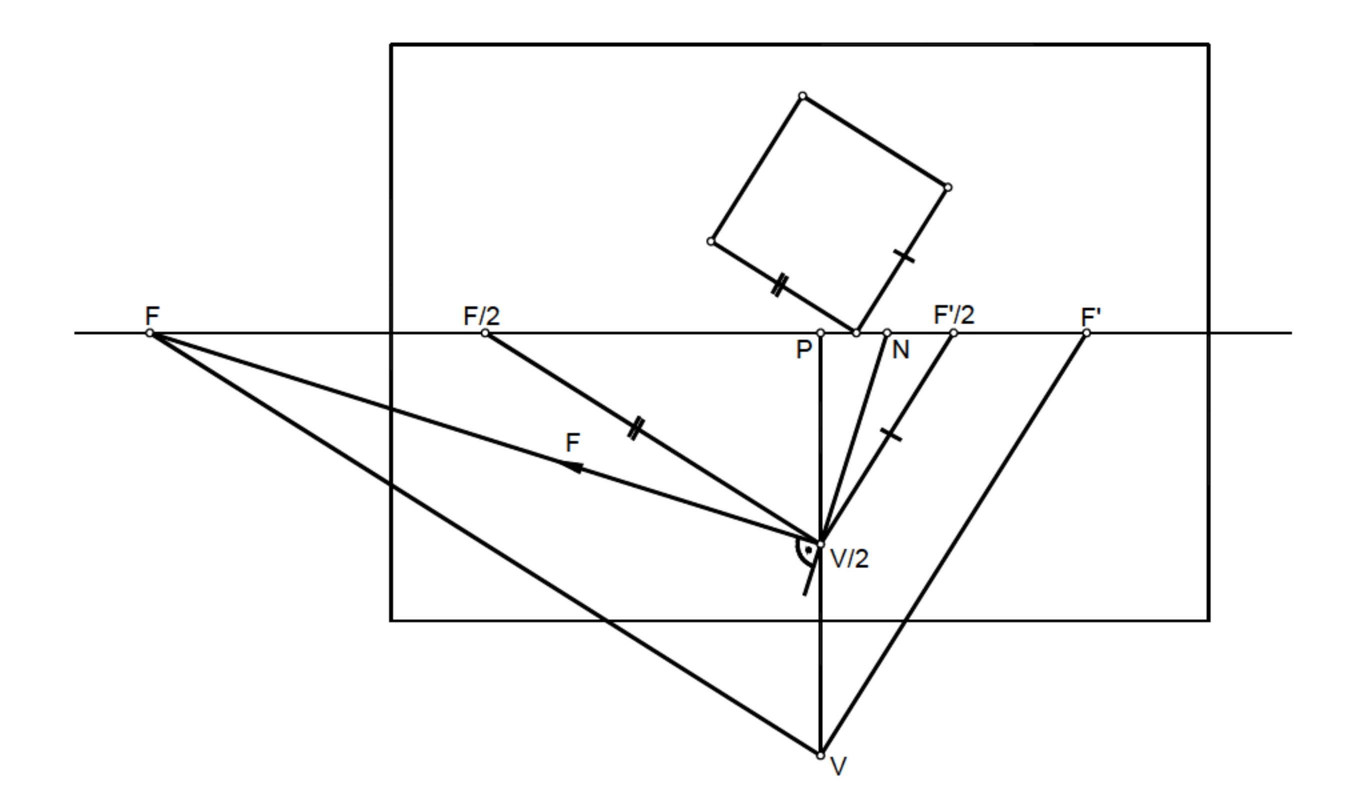
En el dibujo de perspectiva es frecuente que algún punto de fuga e incluso el punto de vista, se salgan fuera del dibujo, convirtiéndose en puntos inaccesibles. Es necesario encontrar entonces puntos de fuga reducidos que nos permitan resolver el problema.

En la figura siguiente tenemos P, V y las rectas VF y VF'.

Dividimos el segmento PV en tantas partes iguales como queramos, 2 en la figura, de modo que el nuevo punto de vista V/2 y el punto de fuga reducido F/2 están ya en el papel, pues hemos supuesto que V y F estaban fuera de él.

Tenemos así las rectas V/2-F'/2 y V/2-F/2 paralelas a VF' y VF, respectivamente.

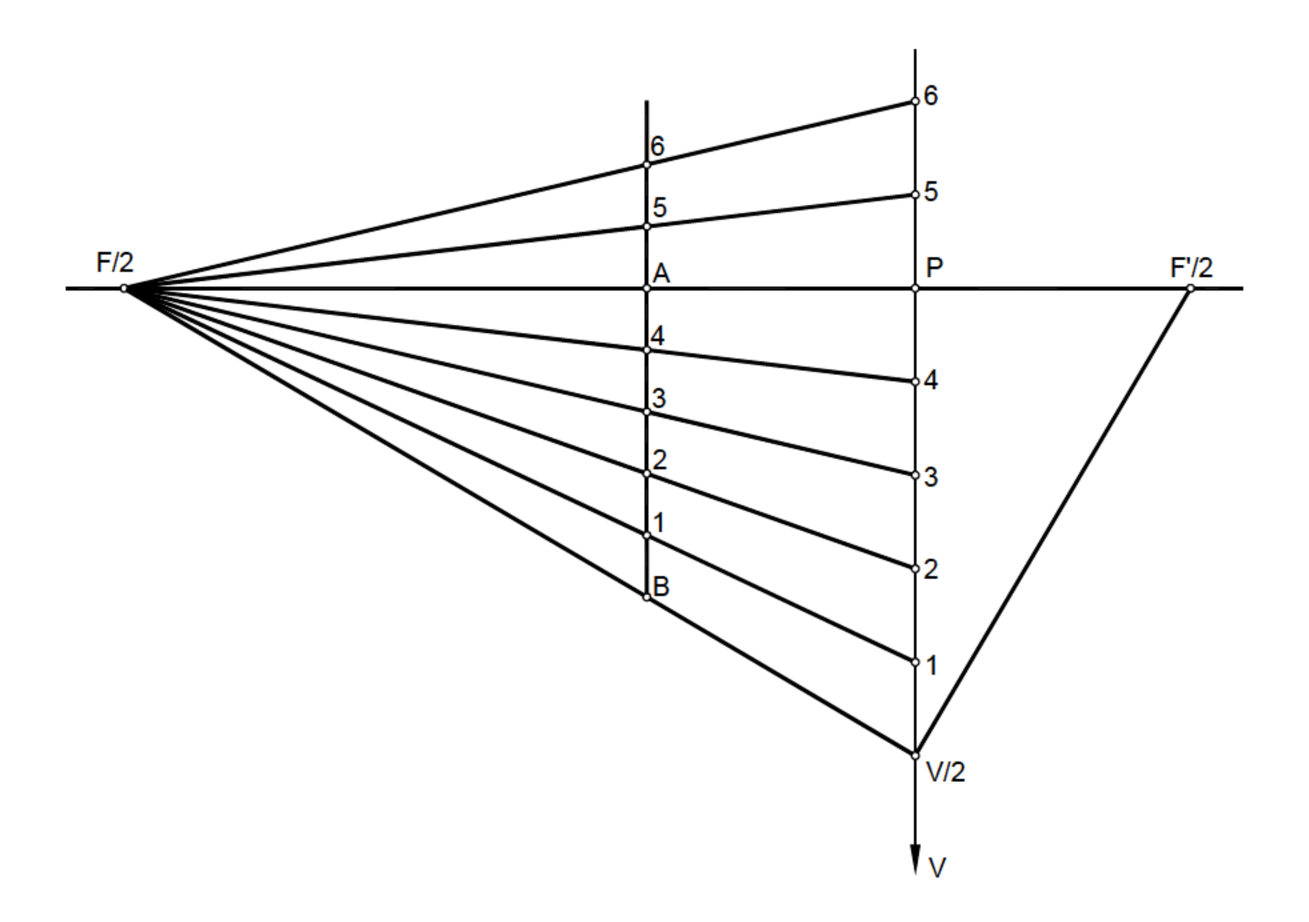
Dividimos P-F'/2 en el mismo número de partes y tenemos el punto N; unimos N y V/2 y por este punto su perpendicular trazada pasará por el punto de fuga inaccesible F, siempre que sean dos direcciones perpendiculares los lados del objeto.



9.4. Pautas

Se llaman pautas a las rectas paralelas a V/2-F/2, cuyas perspectivas concurrirán en F/2.

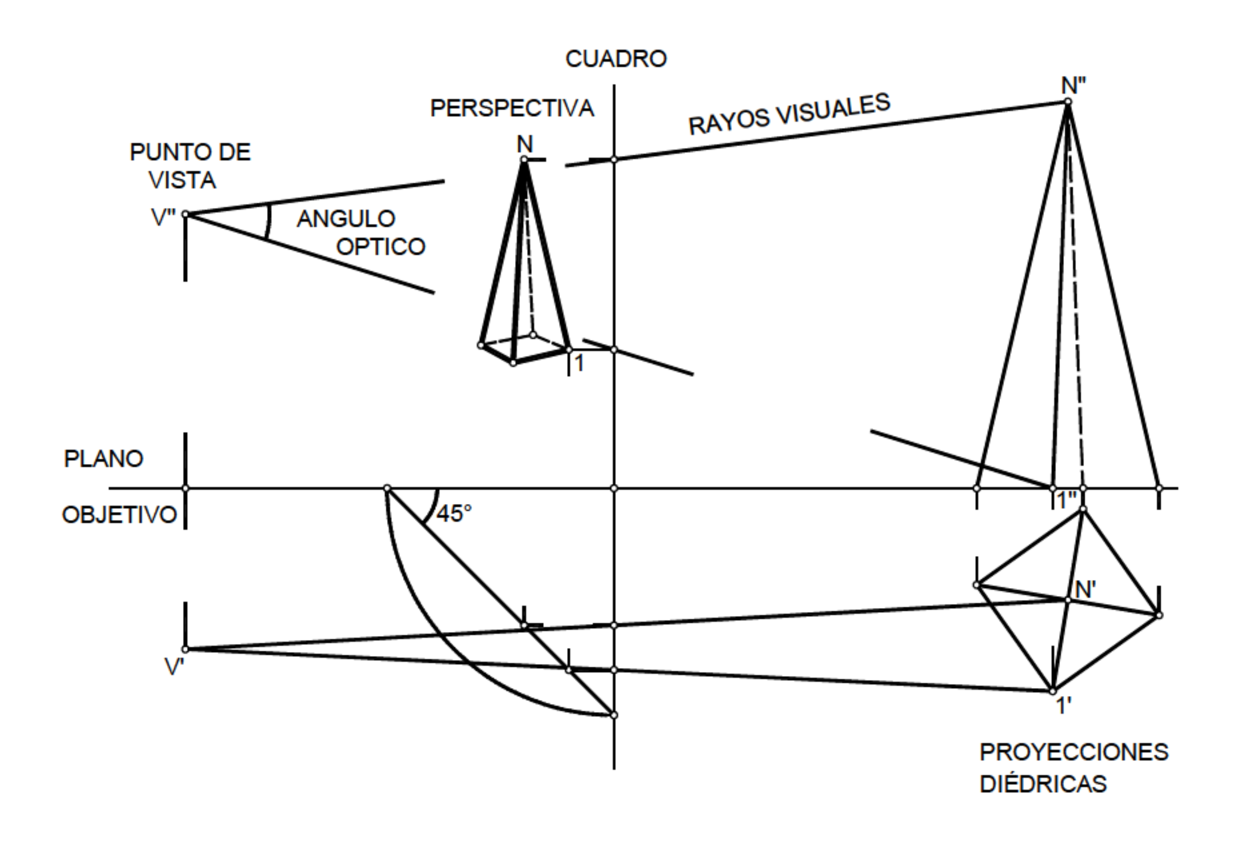
Dichas rectas parten de divisiones equidistantes de P-V/2, y dividen a una recta cualquiera AB y paralela a P-V/2 en el mismo número de puntos pautados, pudiendo ampliar dicho número por encima de la línea de horizonte.

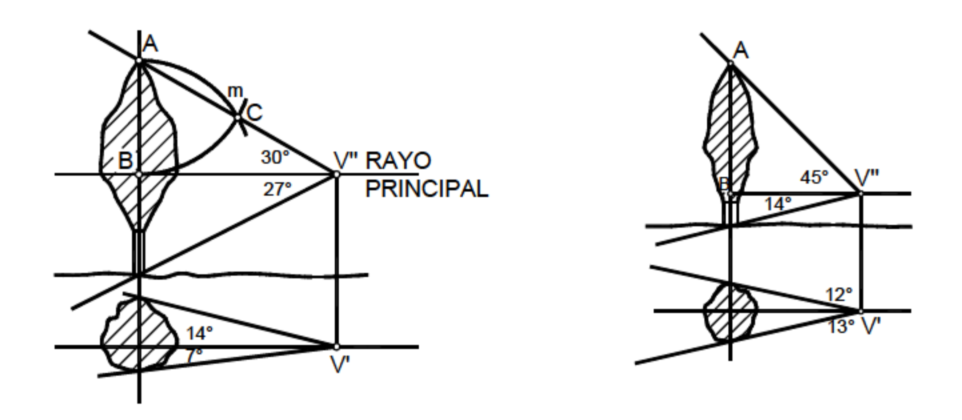


9.5. Distancia mínima que debe existir entre el observador y el objeto

El ángulo óptico teórico es de aproximadamente 90 grados.

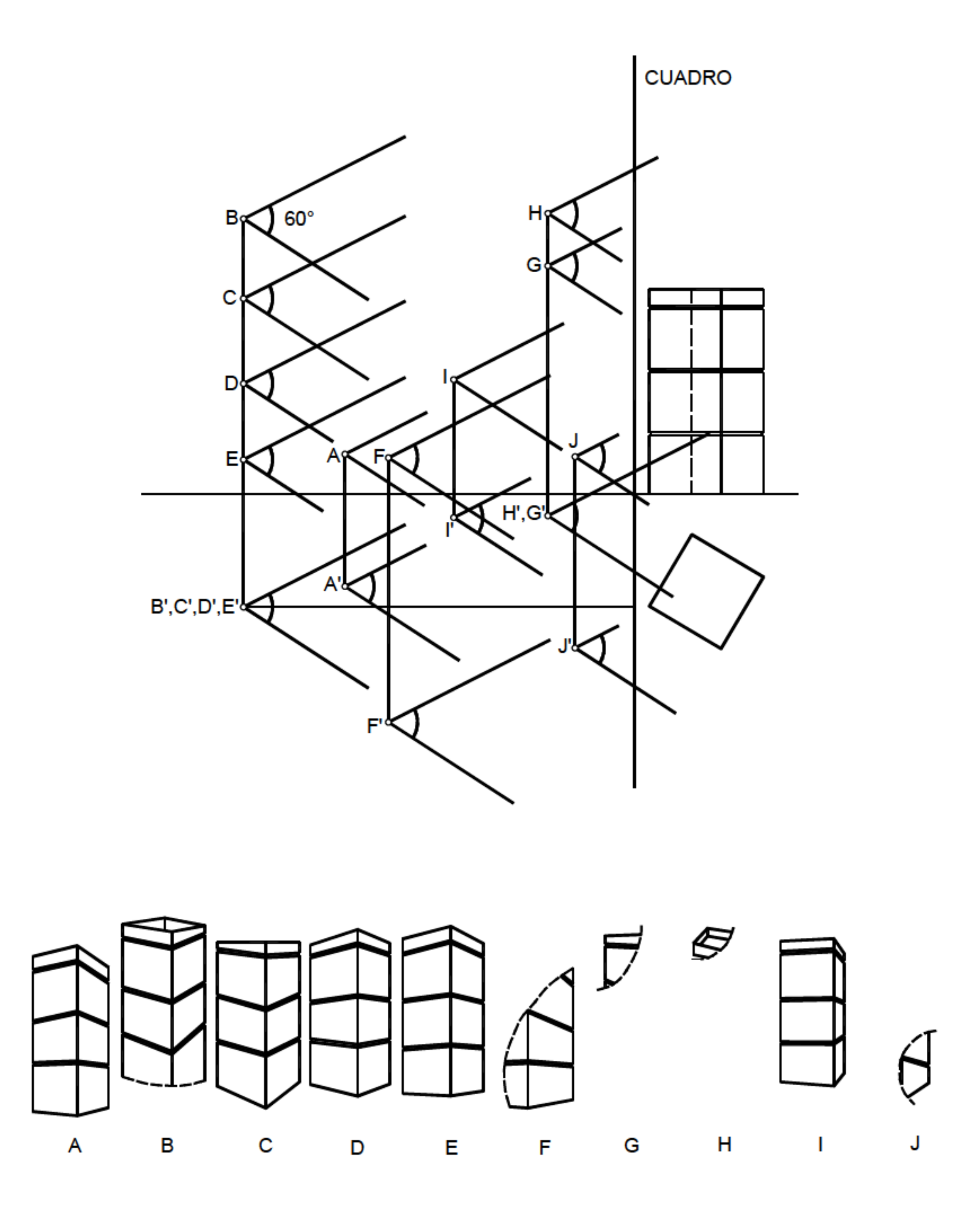
En la práctica es conveniente no sobrepasar los 60°. Cuando no se quiere sobrepasar este límite, se determina la distancia mínima del punto de vista, según se puede apreciar en las siguientes figuras.





9.6. Situación del punto de vista

La distancia al cuadro del punto de vista y su altura con respecto al geometral, dependen de la extensión que se desee abarcar con el ángulo óptico, de la parte del objeto que mejor se desee observar, y del efecto final de la perspectiva. En el ejemplo de la figura adjunta, se ha considerado un edificio de tres plantas, del que se conocen el alzado y la planta y se han tomado diversas posiciones del punto de vista. Se pueden apreciar los distintos efectos que en la perspectiva se producen.



9.7. Método para realizar la perspectiva a una dimensiones prefijadas

Dada una pirámide cuya perspectiva ha de tener 15 mm. de altura exactamente; ésta se hará entre los rayos visuales extremos V"m y V"B.

Establecemos la proporción:

CB/15 = V"B/V"A, 21/15 = 49/V"A, V"A = 35 mm.

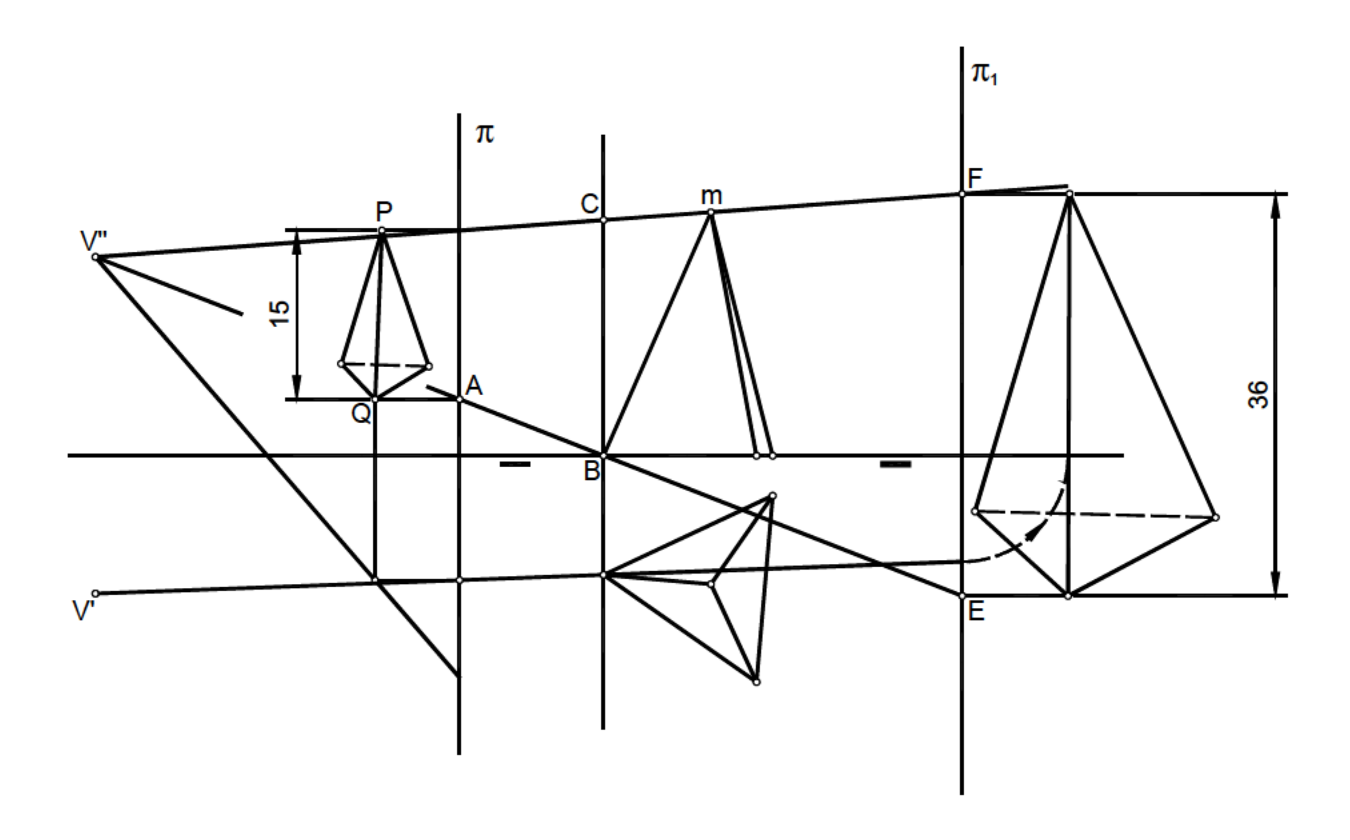
Obtenido este dato colocaremos el cuadro en la posición π.

Si quisiéramos que la perspectiva tuviese 36 mm. de altura:

CB/36 = V"B/V"E, 21/36 = 49/V"E, V"E = 64 mm.

Colocaríamos el cuadro en la posición π_1.

Si nos fuera independiente la altura y quisiéramos dar al dibujo una anchura determinada, deberíamos hacer estos cálculos ateniéndonos a la planta.

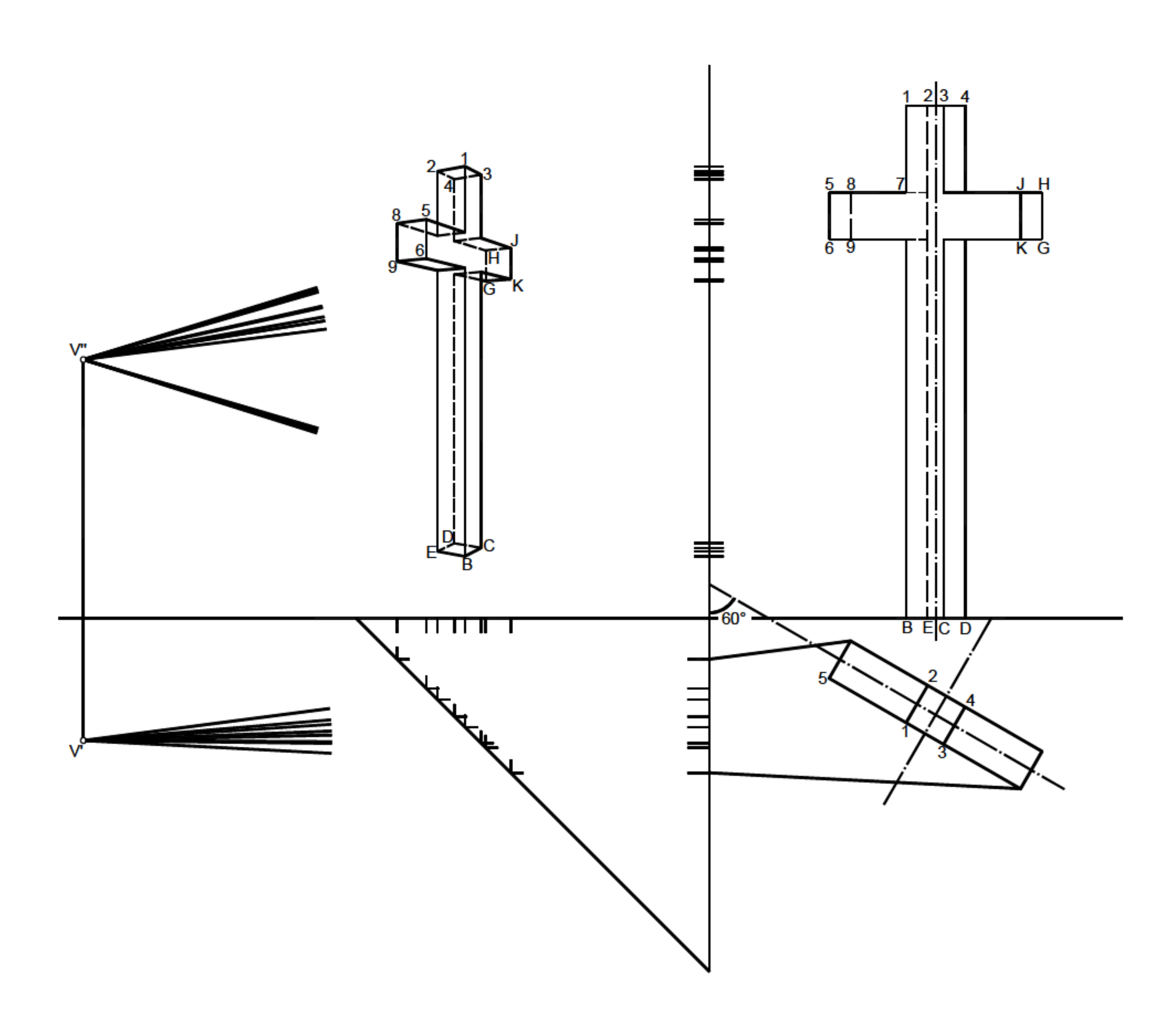


*.- Problema de aplicación del método estudiado.

Una cruz que tiene el cuerpo y los brazos de sección cuadrada de 1 x 1 metros por 12m. de altura, tiene el eje de los brazos en posición horizontal y distante 9.5 m. de la base, siendo cada uno de ellos de 2 metros.

La cruz se apoya directamente sobre el plano objetivo.

Se pide representar la cruz en cónica considerando que el plano del cuadro dista del eje vertical 5 m. y que el eje de los brazos forma 60 grados con aquel, estando el brazo derecho mas cerca del observador a 2.8 m. del plano del cuadro.



10. PERSPECTIVA DEL PLANO DEL CUADRO INCLINADO

Existen casos en los que es necesario inclinar el cuadro, para que las imágenes resulten sin grandes deformaciones, más naturales y de gran originalidad. En el esquema inferior se han representado las cinco posiciones características del plano del cuadro.

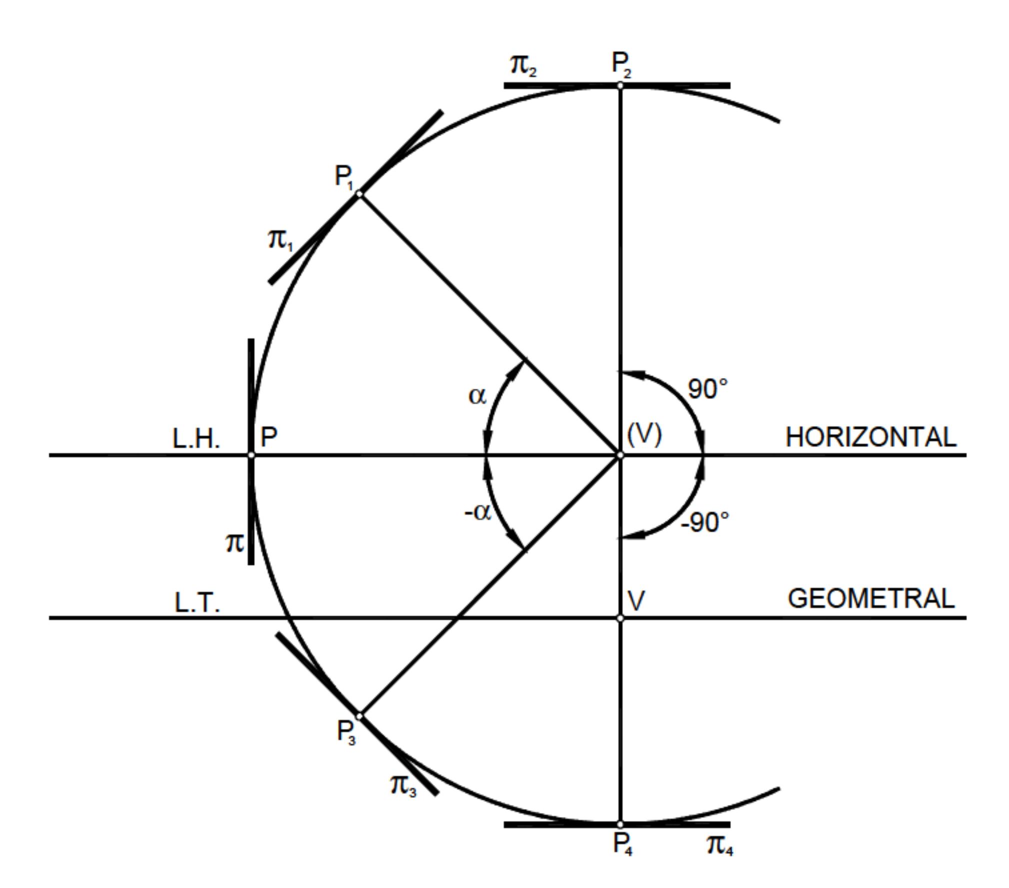
El plano (π) es un cuadro vertical, como los utilizados en lo tratado hasta aquí. Si queremos representar la parte superior de un edificio elevado inclinaríamos el cuadro formando el eje óptico un cierto ángulo α por encima del horizontal (π_1). Para representar techos, bóvedas, etc, colocaríamos el cuadro en posición horizontal (π_2) siendo entonces α=90°.

Si por debajo del plano geometral se encuentra el objeto en posición muy baja, inclinaríamos el cuadro (π_3), formando con el eje óptico un cierto ángulo -α. Llegaría a ser α=-90° en el caso de la representación del patio interior de un edificio, pozos, galerías verticales, etc., situándose el cuadro en la posición horizontal (π_4).

Este sistema de perspectiva presenta las características principales siguientes:

1) La línea de horizonte y L.T. sólo aparecerán en el cuadro, si el valor de α es muy pequeño pudiéndolo hacer una o las dos.

2) El punto principal (P_1, P_2, P_3, P_4) no se sitúa sobre la línea de horizonte.

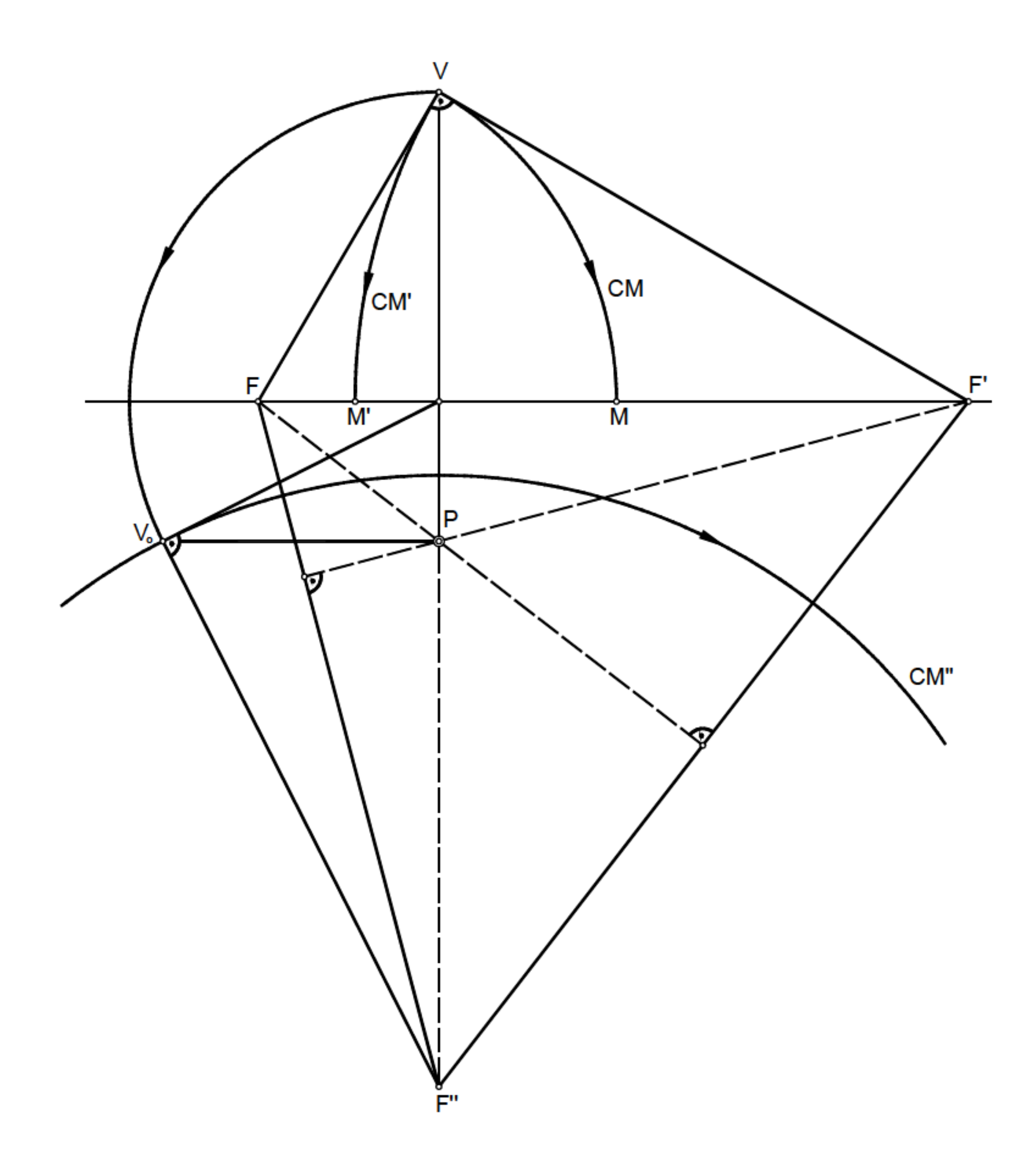


3) Las perspectivas de rectas verticales fugan en un punto, por lo que no resultan paralelas como en el caso de ser el cuadro vertical.

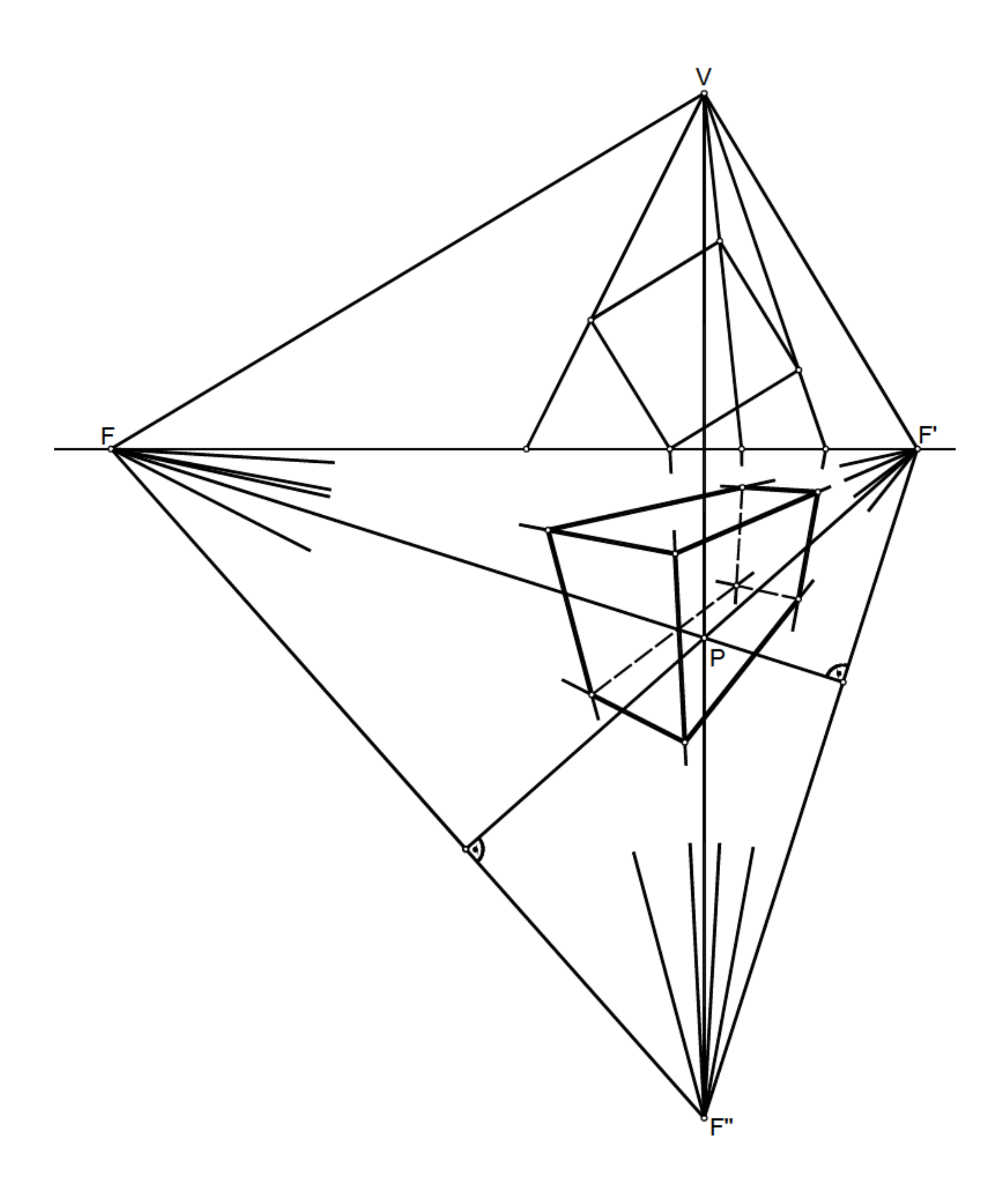
4) Los puntos de fuga de rectas horizontales están situados sobre la línea de horizonte.

5) Los tres puntos de fuga son vértices del "triángulo de fuga", siendo su ortocentro el punto principal.

Aplicando esta última propiedad, se obtiene el punto de fuga F" de las líneas verticales. También aparecen en la figura los círculos de medida (CM"), (CM'), (CM), las dos últimas parten de V y tienen centros en F' y F respectivamente; la primera, parte del abatimiento de V, V_o y centro en F".



En la figura siguiente se ha trazado una perspectiva de plano oblicuo según el método estudiado anteriormente, en lo que a las líneas horizontales que fugan en F y F' se refiere. Obtenido el punto F'', a él concurrirán las perspectivas de las líneas verticales del objeto. En muchos trabajos no es necesario efectuar una detallada y precisa construcción. Se consiguen los mismos efectos por simple estima o apreciación. El efecto de deformación también afecta a las verticales, por lo que habrá que tener en cuenta el acortamiento debido a la distancia.

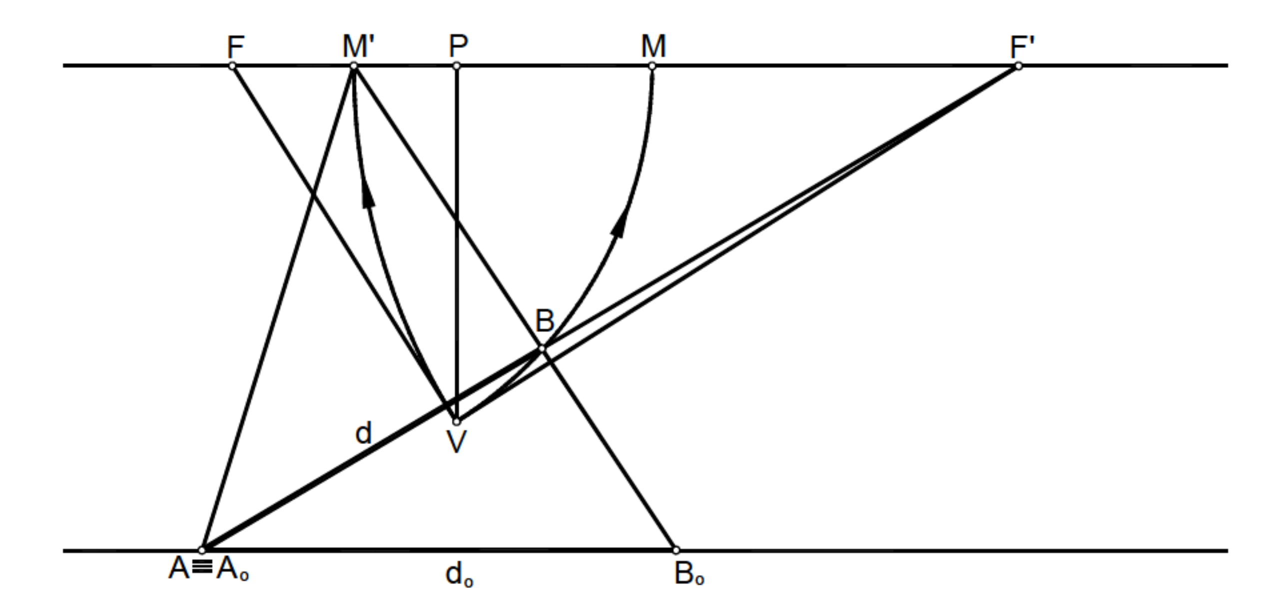


11. PUNTOS MÉTRICOS

La L.T. se emplea como escala de anchuras. M y M' son puntos métricos que sirven para medir y llevar medidas, y que permiten suprimir la planta del objeto.

La verdadera magnitud (d_o), se transforma en su perspectiva (d). Emplearemos M' para las líneas que fugan en F', siendo M el punto métrico de las que lo hacen en F.

Los puntos métricos se obtienen por medio de los círculos de medida.



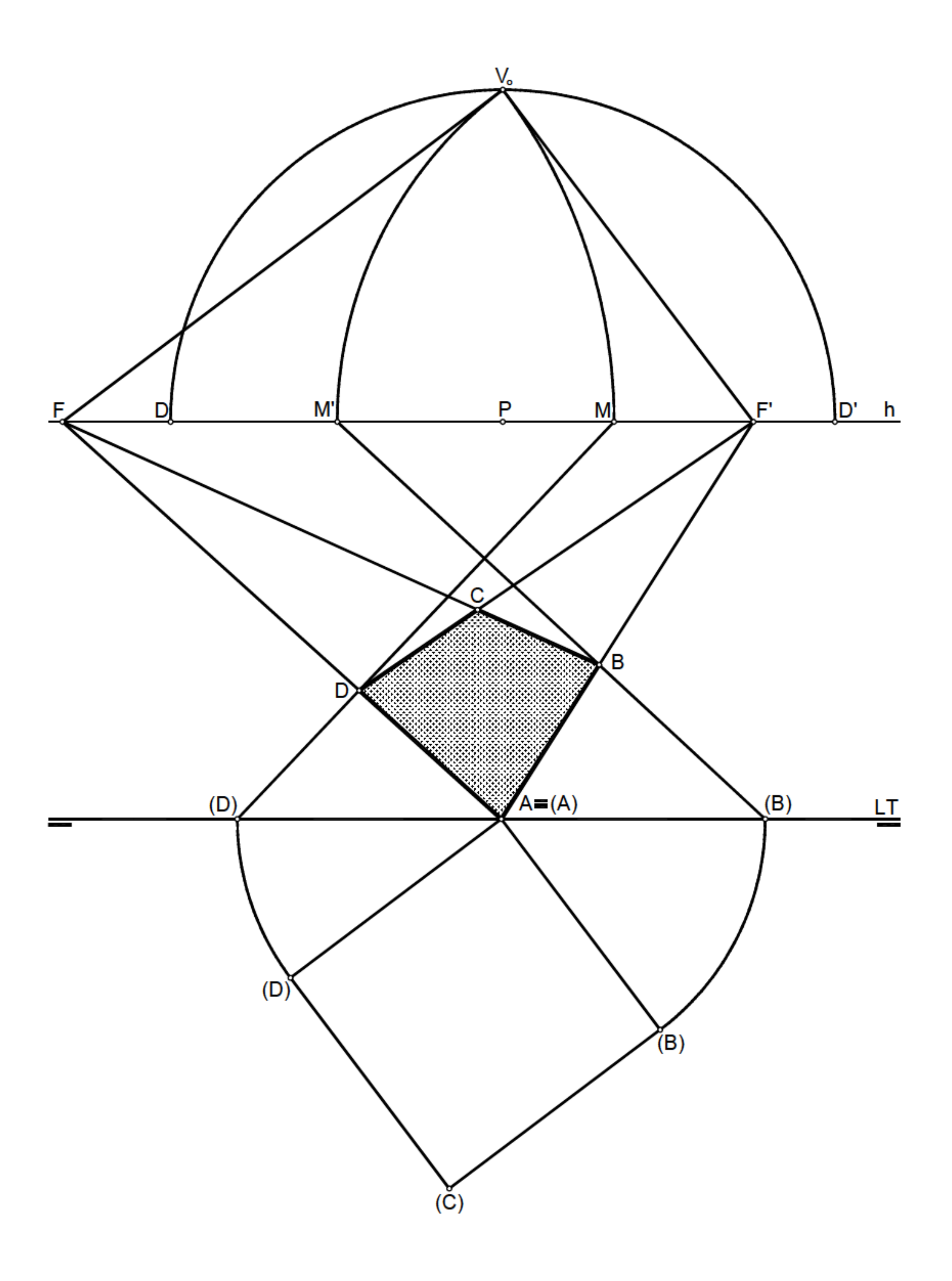
*. - Utilización de los puntos métricos .

La figura se encuentra en la página siguiente.

Conociendo PV_o, alejamiento del punto de vista, obtenemos los puntos de fuga F y F' en la intersección de L.H. con las rectas paralelas a los lados de la figura a representar, trazadas desde V_o. Conocidos los puntos de fuga de dos direcciones, en nuestro caso ortogonales, para obtener los puntos métricos trazamos los arcos de circunferencia de centros F y F' y radios FV_o y $F'V_o$ respectivamente, hasta que corten a L.H. en los puntos M y M', puntos métricos de los puntos de fuga F y F', correspondiendo un punto métrico a cada punto de fuga.

Para hallar la perspectiva de la figura y conocido el punto A≡(A), llevamos a partir de dicho punto y sobre L.T. (A)(B) y (A)(D). Trazamos las rectas (B)M' y (D)M y donde éstas encuentran a F'(A) y F(A) tenemos los puntos B y D, vértices de la figura, obteniendo el punto C, cuarto vértice de la figura, en la intersección de las rectas BF y DF'.

Los puntos métricos evitan dibujar la planta.

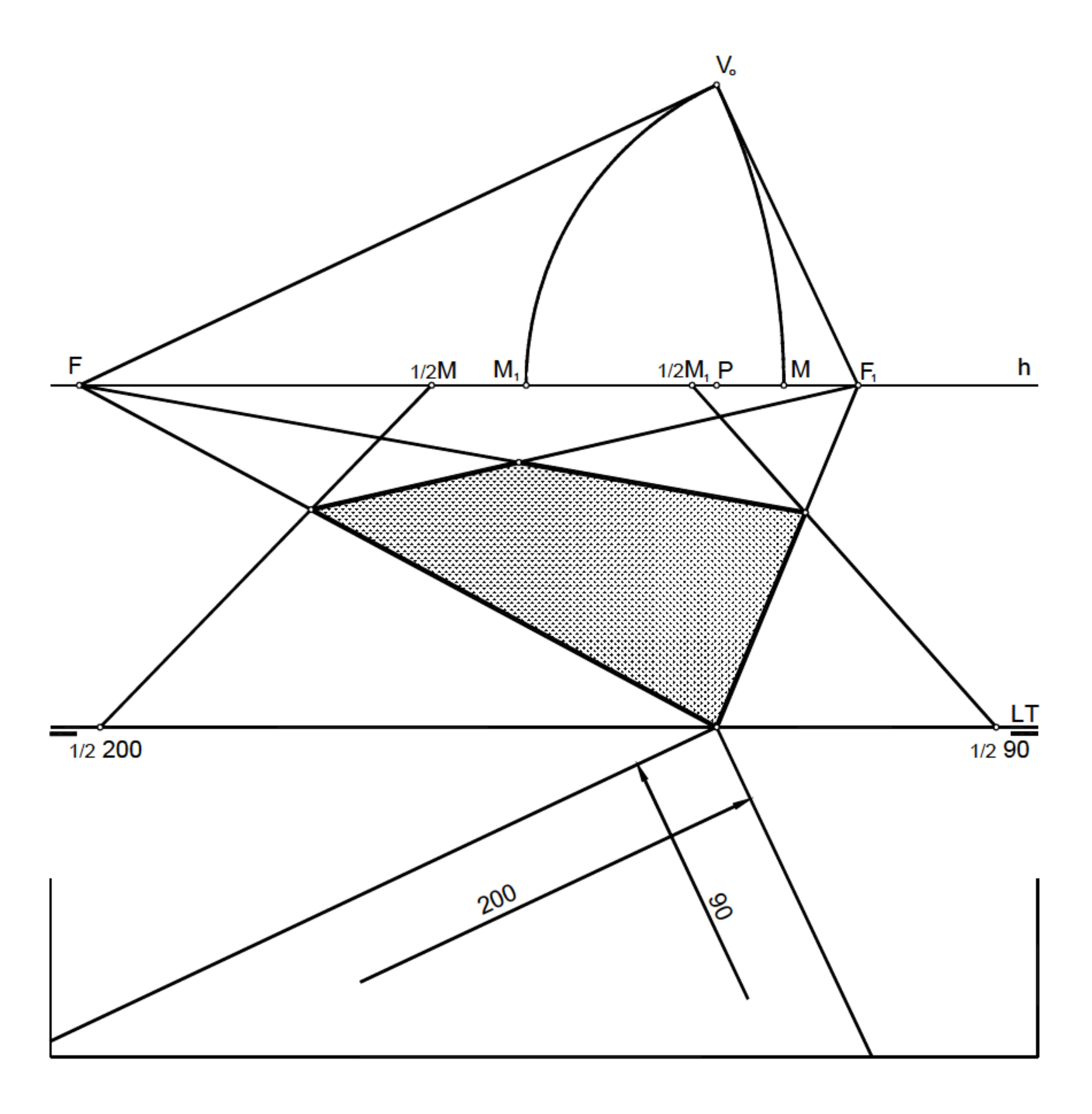


V
F
D
M'
P
M
F'
D'
h
C
B
D
(D)
A=(A)
(B)
LT
(D)
(B)
(C)

*.- Puntos métricos reducidos.

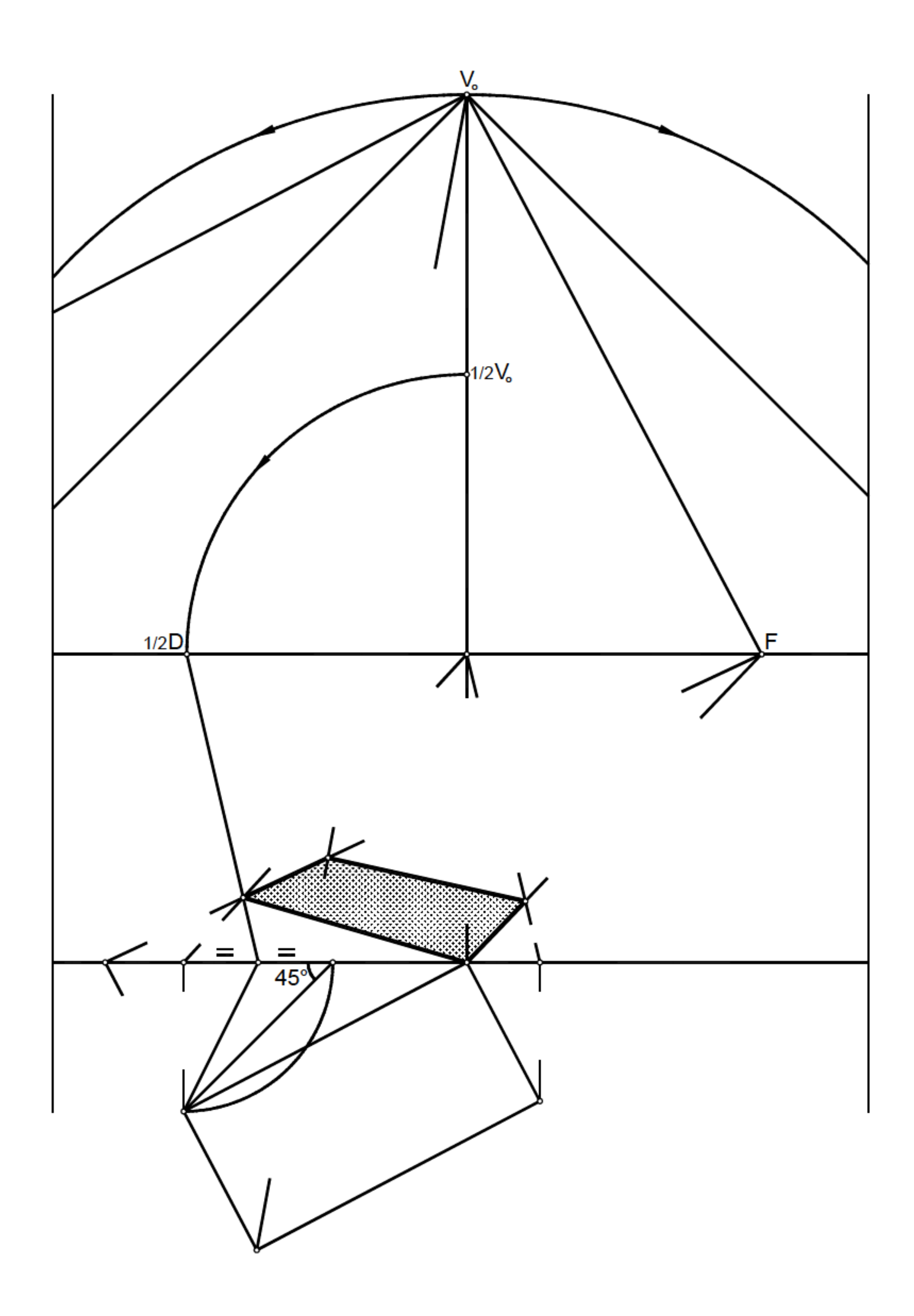
Se utilizan cuando las magnitudes sobre la L.T. no entran dentro de los límites del dibujo.

(F ½M) = (FM/2) (F$_1$ ½M$_1$) = (F$_1$M$_1$/2).



12. PUNTOS DE DISTANCIA REDUCIDOS

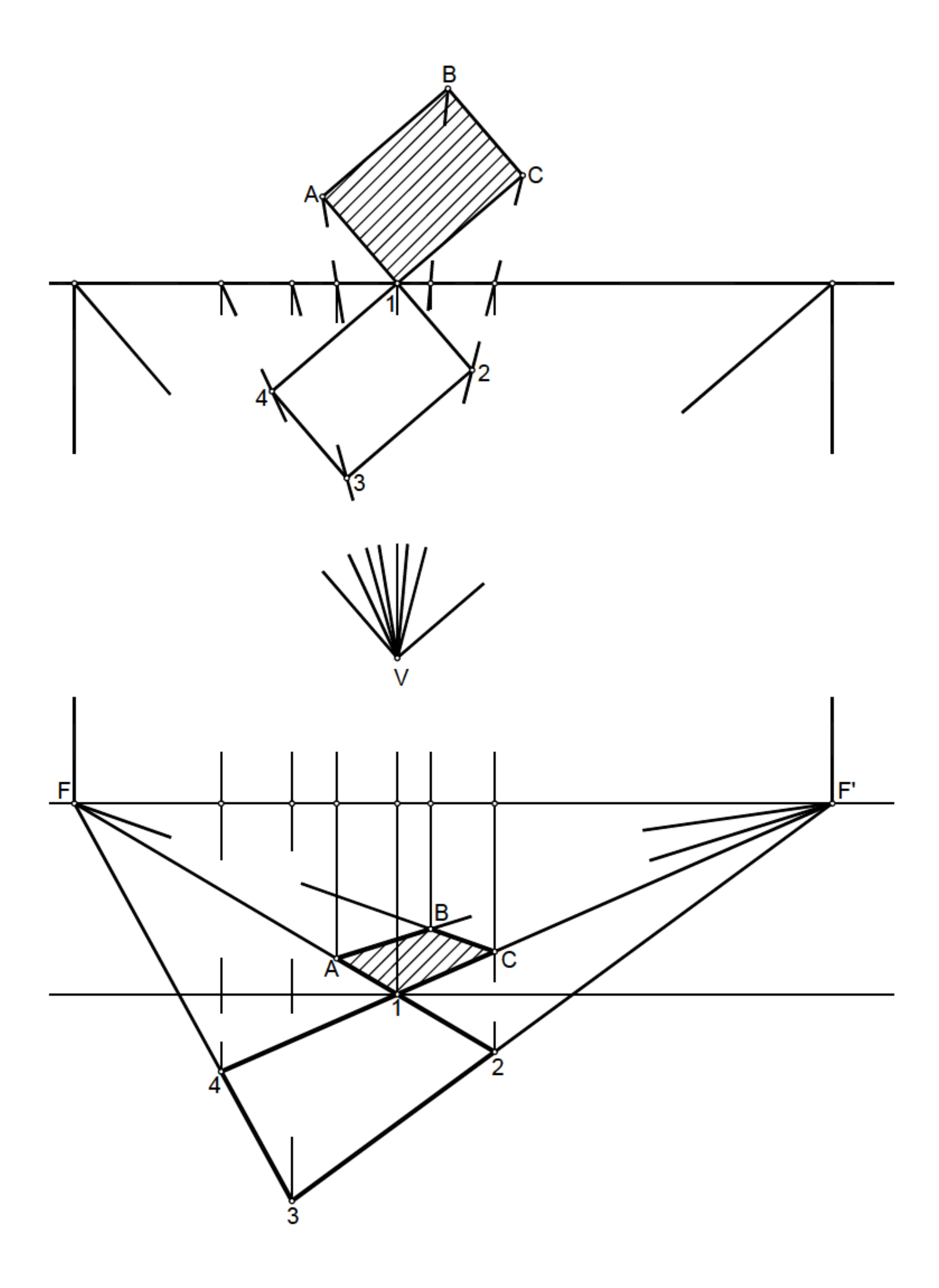
Se utilizan cuando los puntos de distancia son inaccesibles.



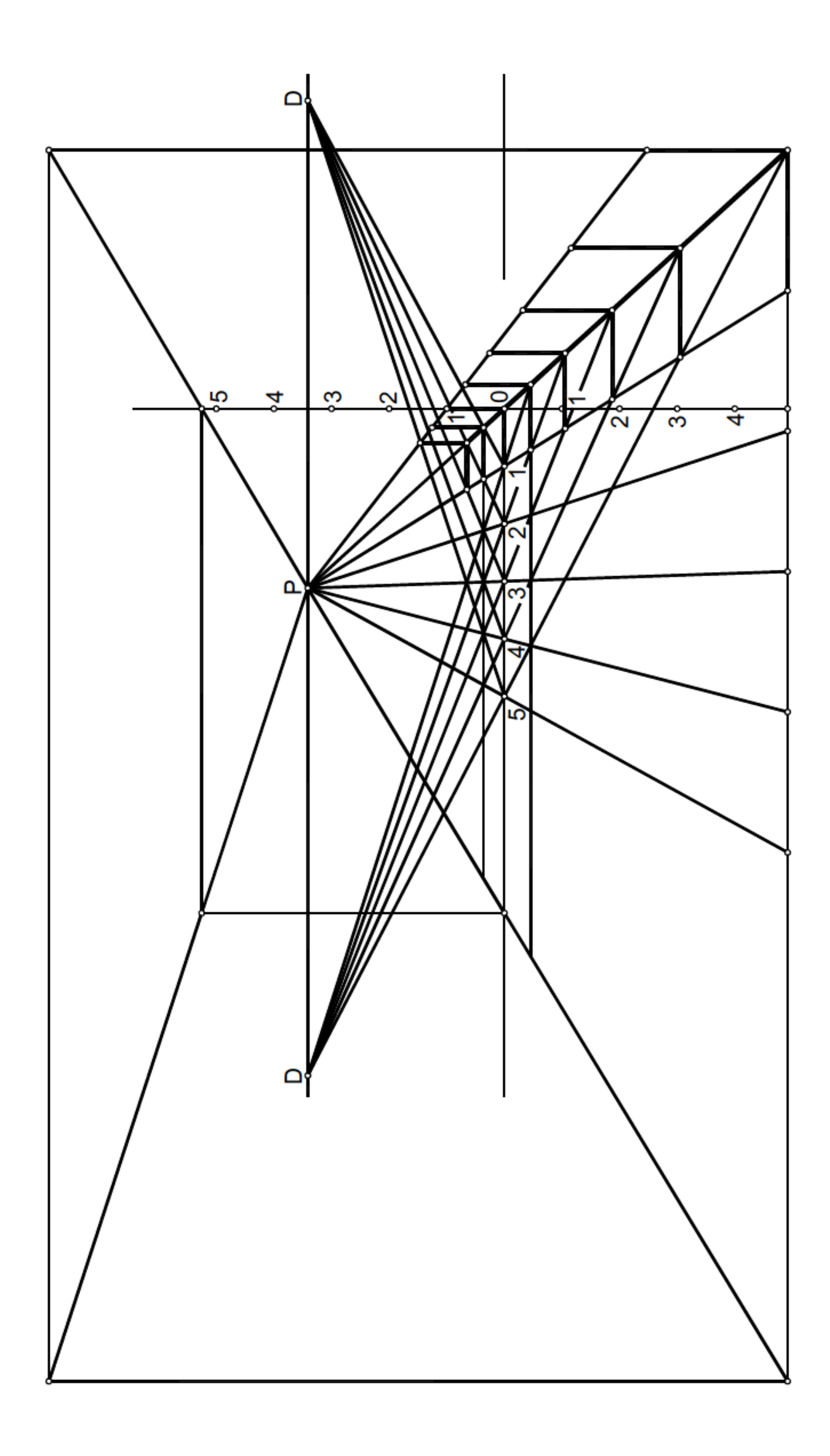
13. PERSPECTIVA AMPLIADA Y REDUCIDA CON RESPECTO A LA PLANTA

Según apreciamos en la figura inferior, según la disposición de la planta con respecto al plano del cuadro obtenemos la perspectiva de mayor o menor tamaño.

Si se sitúa la planta entre el punto de vista y el cuadro, su perspectiva 1, 2, 3, 4 será de mayor tamaño que si se sitúa dicha planta al otro lado del cuadro con respecto al punto de vista V. En este caso la perspectiva resultante será la que en la figura aparece rayada 1, A, B, C.



14. PERSPECTIVA CENTRAL. ESCALAS

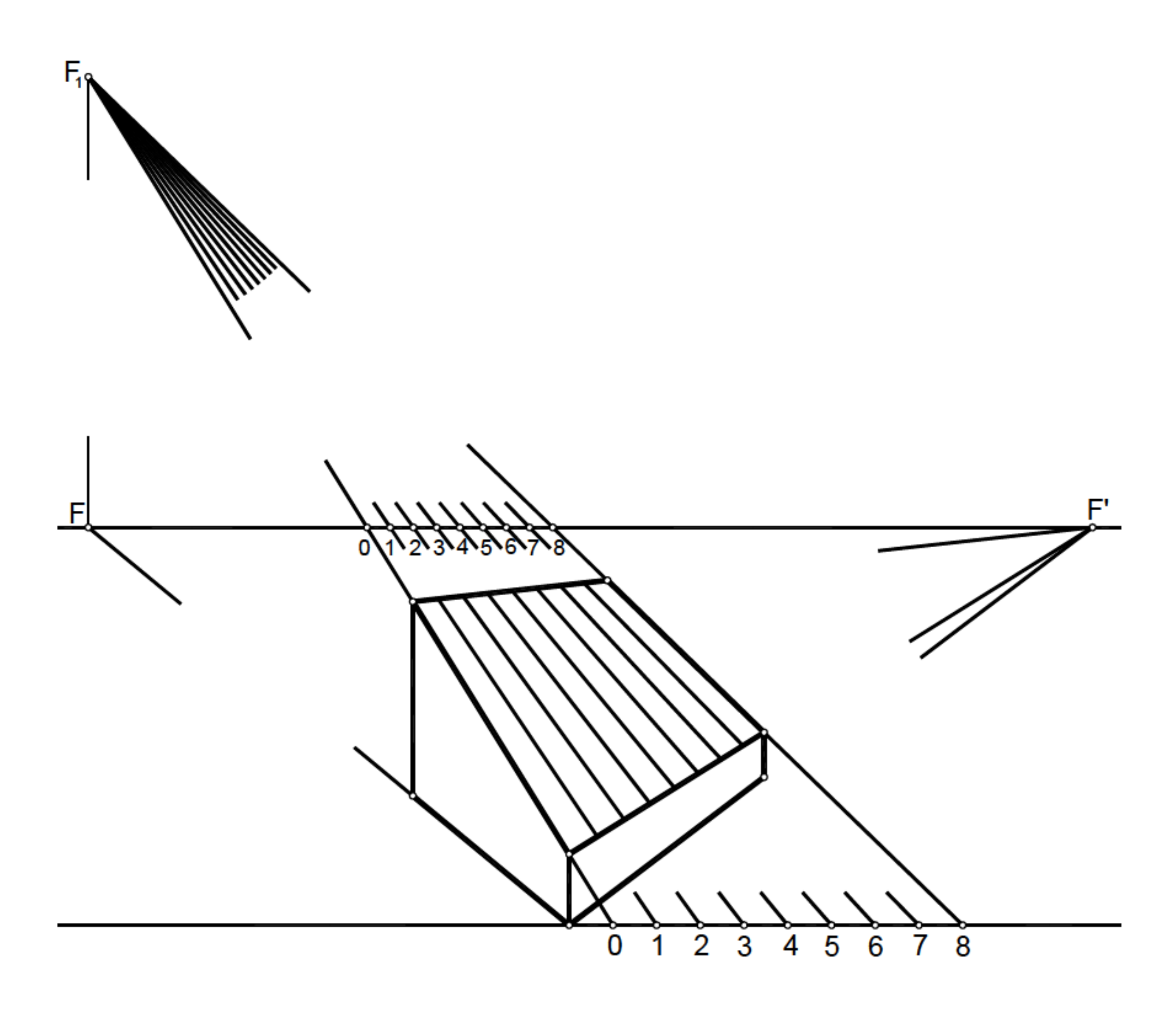


15. PAUTADO PARA LÍNEAS DE MÁXIMA PENDIENTE DE PLANOS INCLINADOS

Las líneas de máxima pendiente de planos inclinados fugan en el mismo punto F_1 que lo hacen los límites de dicho plano inclinado.

Si el punto F_1 es inaccesible, se prolongan los límites del plano hasta cortar a las líneas de tierra y de horizonte, determinando los puntos O y 8 en cada una de ellas.

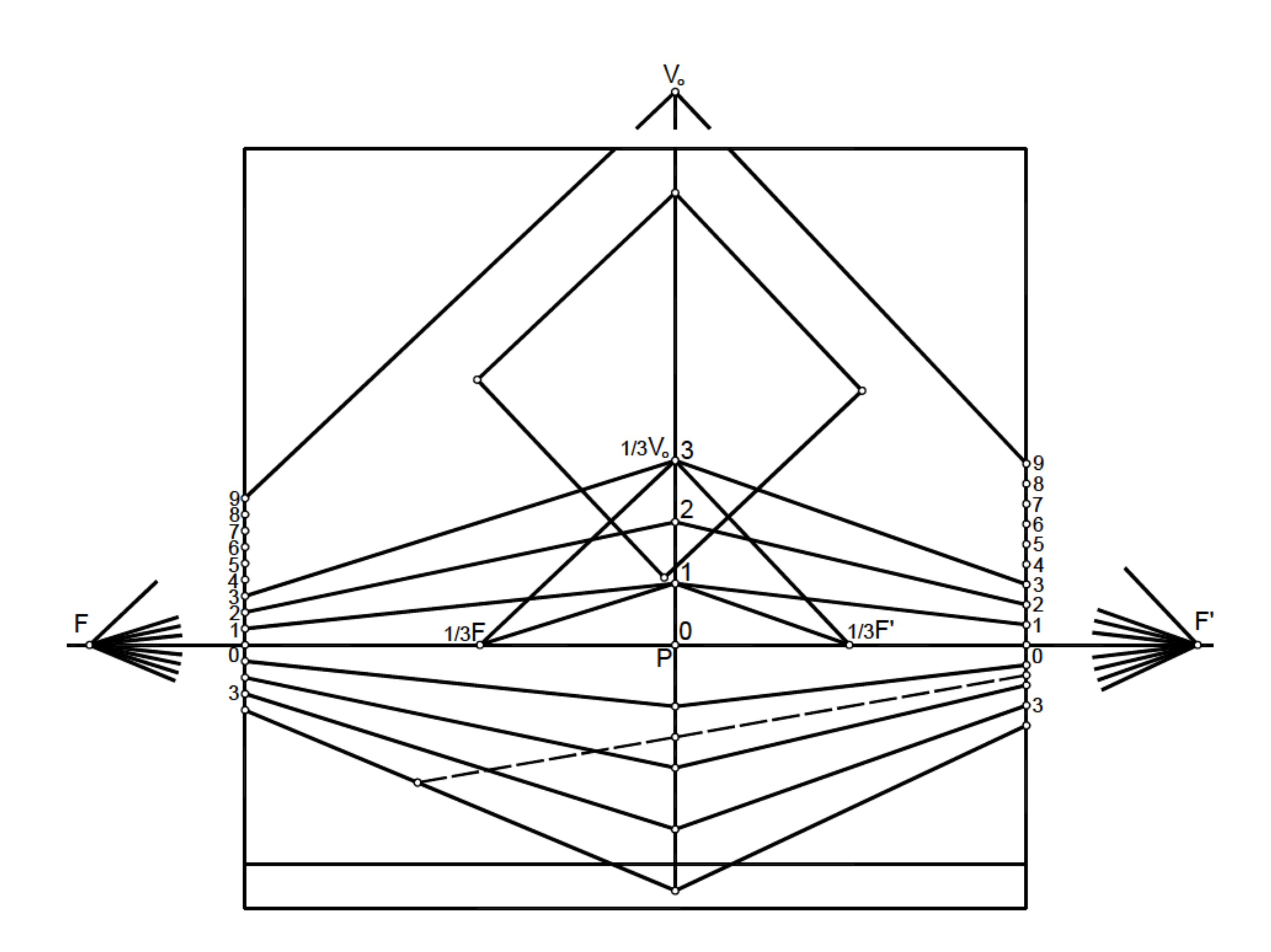
Se divide cada uno de los tramos en partes iguales, que al unirlos ordenadamente dan alineaciones que concurren en el punto F_1 (ahora centro de simetría).



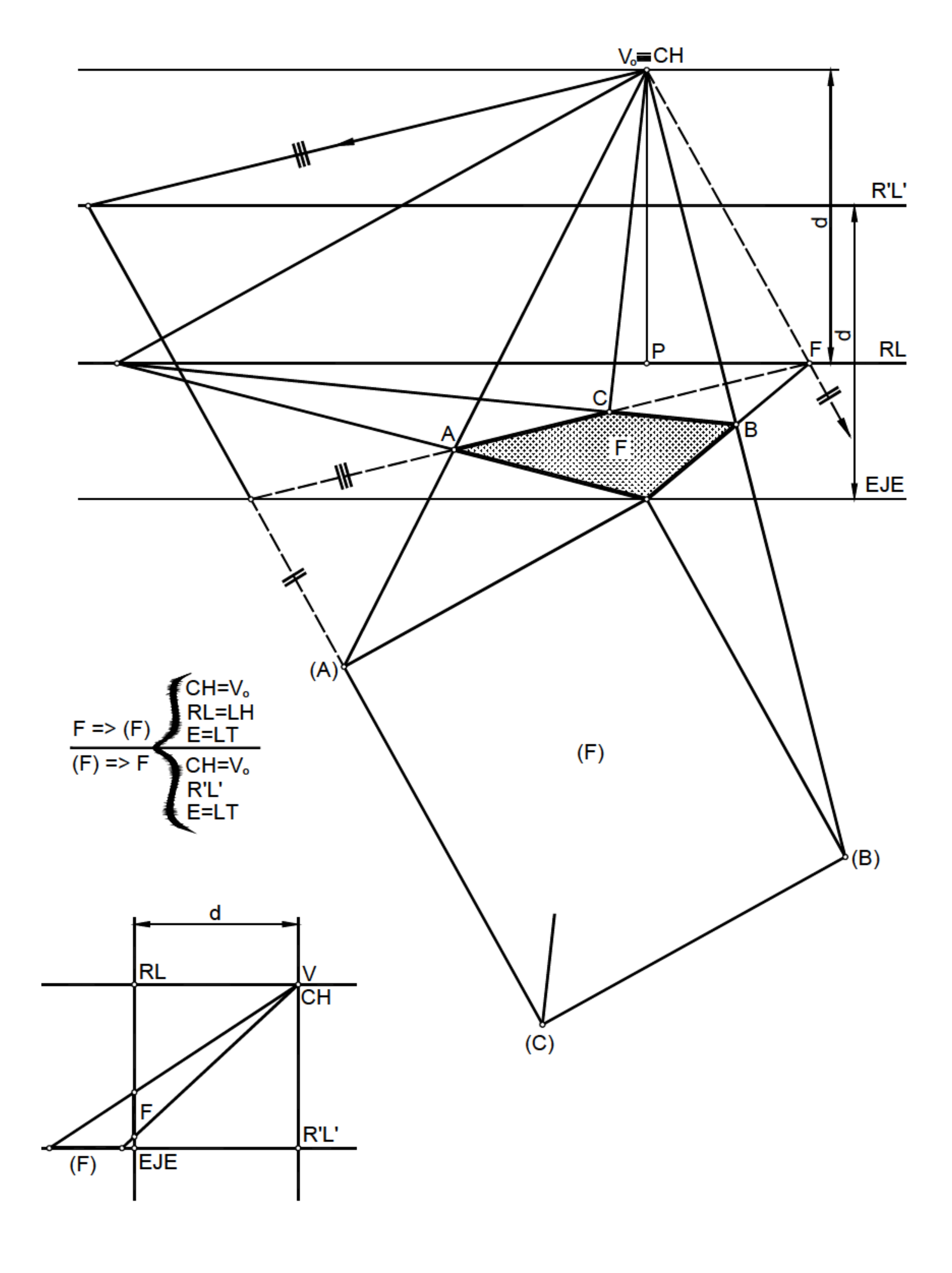
16. PUNTOS DE VISTA Y DE FUGA INACCESIBLES. PAUTAS

Conocida la distancia del punto de vista, marcamos el punto 1/ 3V_o, que entra dentro de los límites del dibujo. Por el punto anterior trazamos paralelas a los dos lados del objeto obteniendo los puntos 1/3F y 1/3F'. El segmento P1/3V_o, lo dividimos en tres partes iguales, que nombraremos con 1, 2 y 3. Uniendo el punto 1 con los puntos de fuga reducidos, obtenemos unas direcciones, y por el punto 1/3V_o trazaremos paralelas a dichas direcciones, obteniendo sobre los límites del dibujo unos puntos que también hemos denominado 3. Dividiendo los segmentos 03 de los límites del dibujo en tres partes iguales, obtenemos los puntos 1 y 2, que uniremos con los puntos 1 y 2 obtenidos al principio, dándonos rectas que se cortan en los puntos de fuga F y F', obteniendo las pautas. Podemos seguir trazando pautas por debajo de L.H. o continuar por encima de las ya obtenidas.

La línea de puntos, es una línea de fuga que puede ser obtenida con toda exactitud o simplemente estimada.



17. LA HOMOLOGÍA EN LA PERSPECTIVA CÓNICA

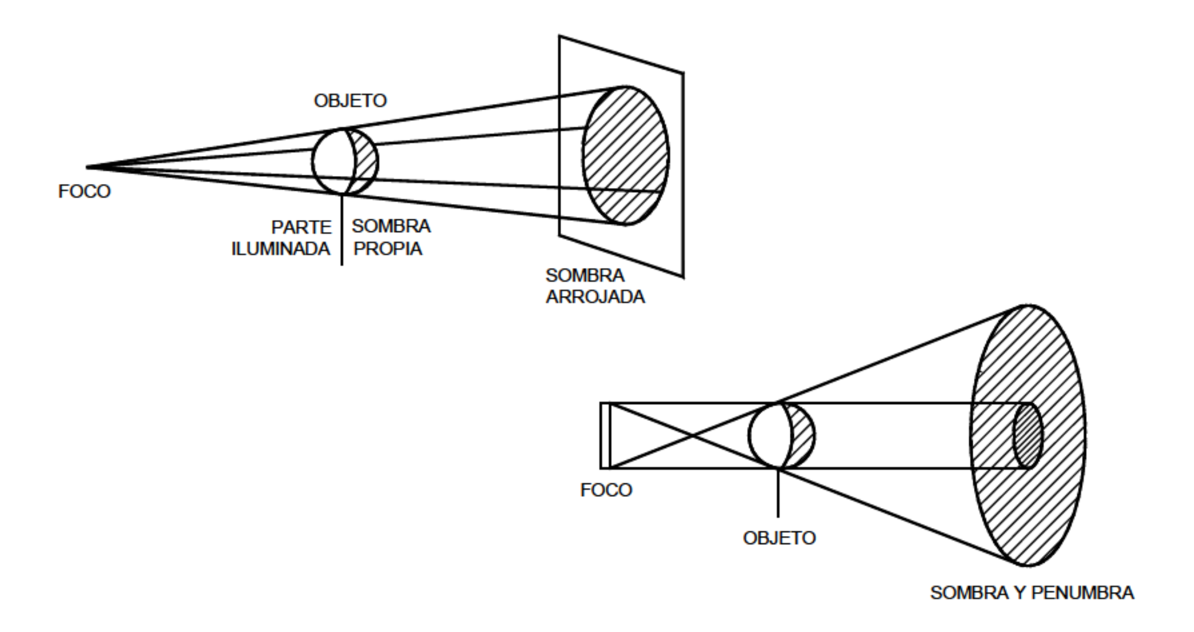


18. TEORÍA DE SOMBRAS. INTRODUCCIÓN

Generalmente una perspectiva debe completarse con los efectos que sobre los objetos producen los rayos luminosos, sombras propias, arrojadas y penumbras, aumentando el efecto y realidad de los dibujos.

Los rayos luminosos pueden proceder de un foco puntual o del Sol, dando lugar a iluminación cónica o cilíndrica respectivamente.

En estos dibujos se pueden apreciar los efectos luminosos a que nos referimos. Si el foco tiene cierto tamaño, tiene lugar un decrecimiento gradual de la intensidad luminosa, lo que produce a partir de la sombra otra zona denominada penumbra que va disminuyendo a medida que se amplía.



En figuras sucesivas representaremos el Sol por la letra S, y a un foco puntual por la F; pudiendo considerarse en tres diferentes posiciones:

a) Iluminación que procede por detrás del observador.- Si procede del Sol los rayos llegarán en una dirección y todos paralelos a ella. Su punto de fuga se encontrará por debajo de la línea de horizonte.

b) Iluminación que procede delante del observador.- El punto de fuga se encontrará por encima de la línea de horizonte. En este caso, la fuga coincide con la posición que realmente ocupa el Sol en la perspectiva.

c) Iluminación que procede del plano del cuadro.- Los rayos, serán paralelos a él, por lo tanto rectas de frente, permaneciendo por lo tanto paralelas en la perspectiva.

Para elegir el tipo de iluminación y su posición, se tendrá en cuenta el efecto que se pretende. La sombra que produce una línea vertical, servirá de ensayo que nos ayudará a su elección.

En páginas sucesivas iremos viendo los diferentes casos que pueden presentarse; sombras del punto sobre el plano objetivo, sobre un plano vertical, sobre un plano inclinado, sobre superficies geométricas, etc. Sombras, de una recta vertical, de una oblicua, de una horizontal, de una curva. Pasaremos después a estudiar las sombras en los sólidos, procurando detallar los casos más representativos y terminaremos este tema realizando un estudio de degradación de luces y sombras y reflejos de cuerpos próximos.

18.1. Sombra del punto

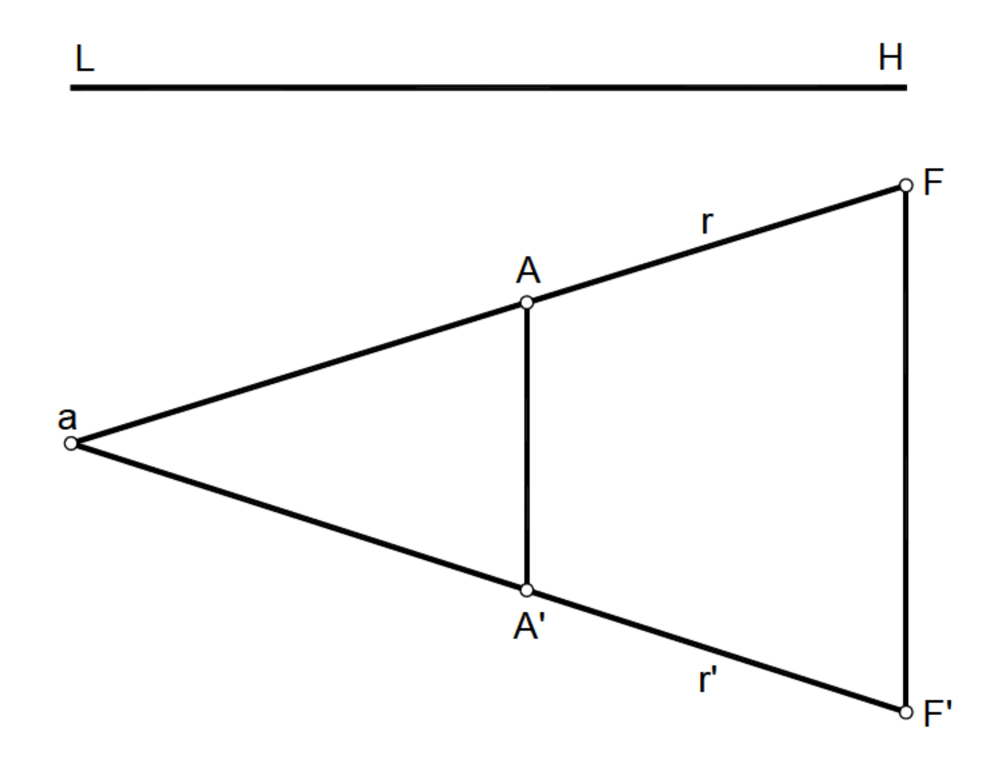
Tendremos en cuenta que:
a .... es la perspectiva de la sombra.
A, A' .... son las proyecciones cónicas de un punto.
F, F' .... son las proyecciones cónicas del foco.
S, S' .... es el punto de fuga de la dirección de los rayos luminosos.

18.1.1. *Sombra sobre el plano objetivo*

Regla: Para determinar la sombra de un punto sobre el plano objetivo, se determina la intersección que forma con éste el plano vertical que pasa por el punto y por el foco luminoso (plano lumínico); y luego se traza el rayo luminoso correspondiente a este punto, prolongándolo hasta su intersección con la traza del plano lumínico.

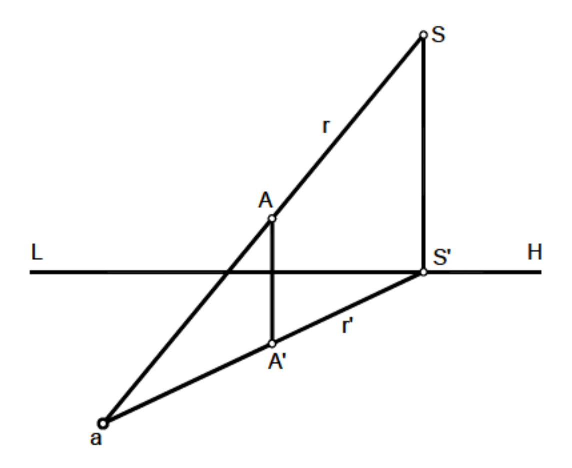
18.1.1.1. Iluminación producida por un punto luminoso propio

Para obtener la perspectiva de la sombra, punto a, unimos F con A y A' con F' obteniendo r y r' respectivamente y donde se cortan r y r' tenemos la sombra.



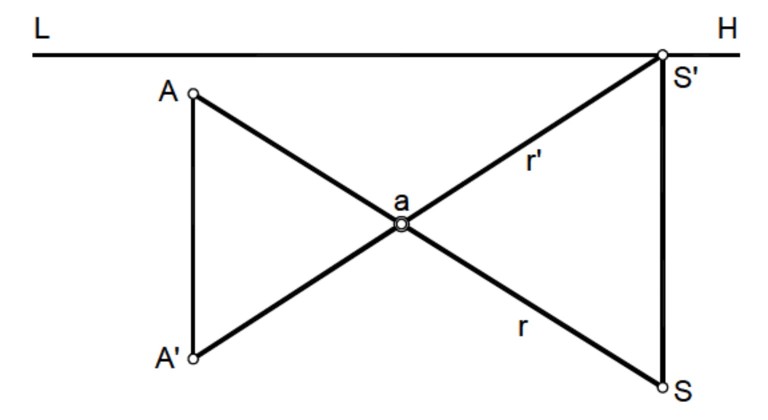
18.1.1.2. Con el Sol delante del observador

La. proyección directa del punto de fuga está por encima de L.H. y su perspectiva está sobre L.H..



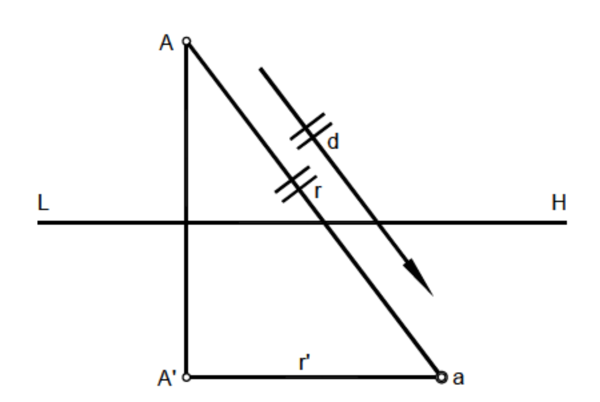
18.1.1.3. Con el Sol detrás del observador

La proyección directa del punto de fuga se encuentra por debajo de L.H., estando su perspectiva sobre L.H.



18.1.1.4. Rayos del Sol paralelos al plano del cuadro

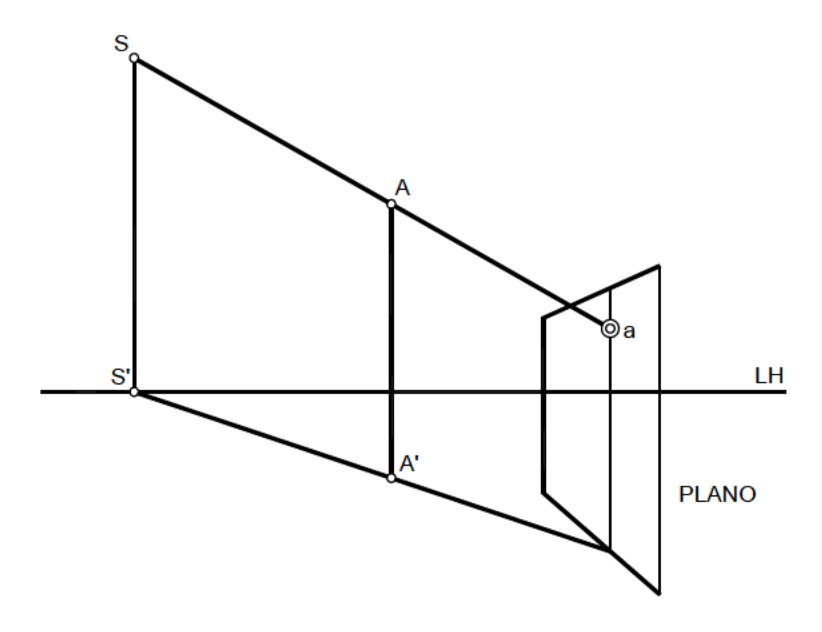
Al ser los rayos paralelos al plano del cuadro, no le cortarán y por lo tanto no tienen punto de fuga. Para hallar la perspectiva de la sombra, trazamos por el punto una recta frontal paralela a la dirección de los rayos, r y r', encontrándose la perspectiva de la sombra en su intersección.



18.1.2. *Sombra sobre un plano vertical*

Trazamos el plano vertical que pasa por el punto y por el foco luminoso (que se denomina plano lumínico). Hallamos la intersección entre el plano lumínico y el plano vertical, sobre el que vamos a proyectar la sombra, que será una recta vertical. La intersección de dicha vertical con el rayo luminoso correspondiente a dicho punto, será la sombra del punto sobre un plano vertical.

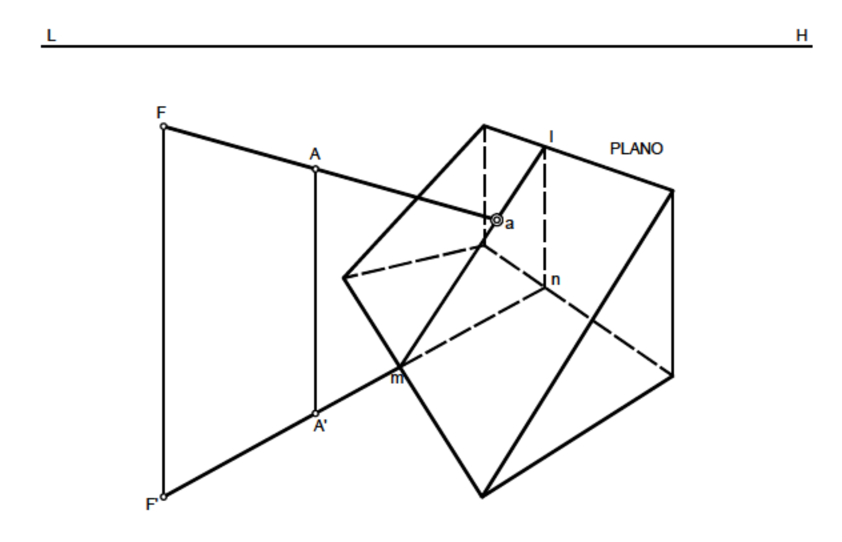
En el ejemplo, prolongamos S'A' hasta cortar a la recta del plano, se levanta una vertical, que ha de cortarse con la recta SA, en la sombra (a) del punto.



18.1.3. *Sombra sobre un plano inclinado*

Obtenemos la recta intersección del plano lumínico con el plano inclinado y donde esta recta encuentra al rayo luminoso que corresponde al punto, es la sombra que produce dicho punto.

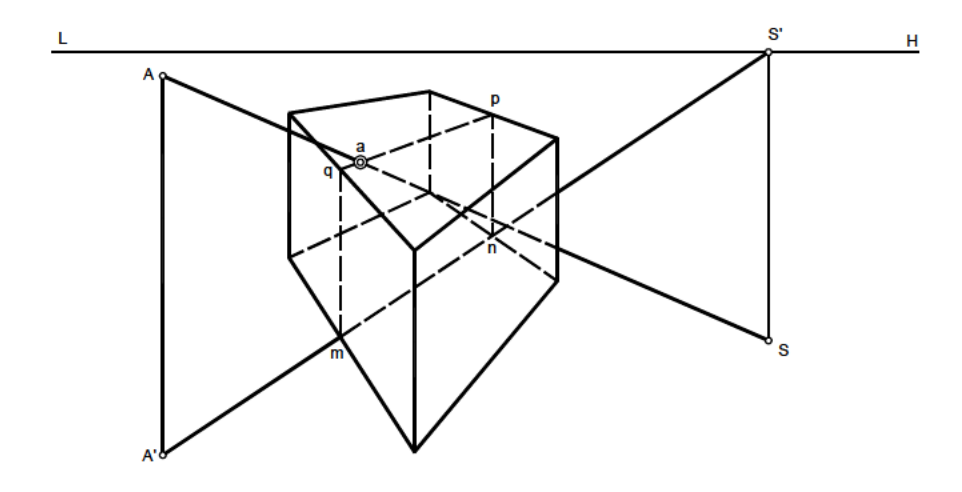
La recta lm es la intersección del plano inclinado con el lumínico. Cuando FA encuentre a lm obtendremos el punto (a), sombra del punto A sobre el plano inclinado dado.



18.1.4. *Sombra sobre una superficie poliédrica*

Obtenida la intersección del plano lumínico con la superficie poliédrica, trazamos el rayo luminoso del punto y donde se corte con la intersección obtenida, encontramos la sombra del punto.

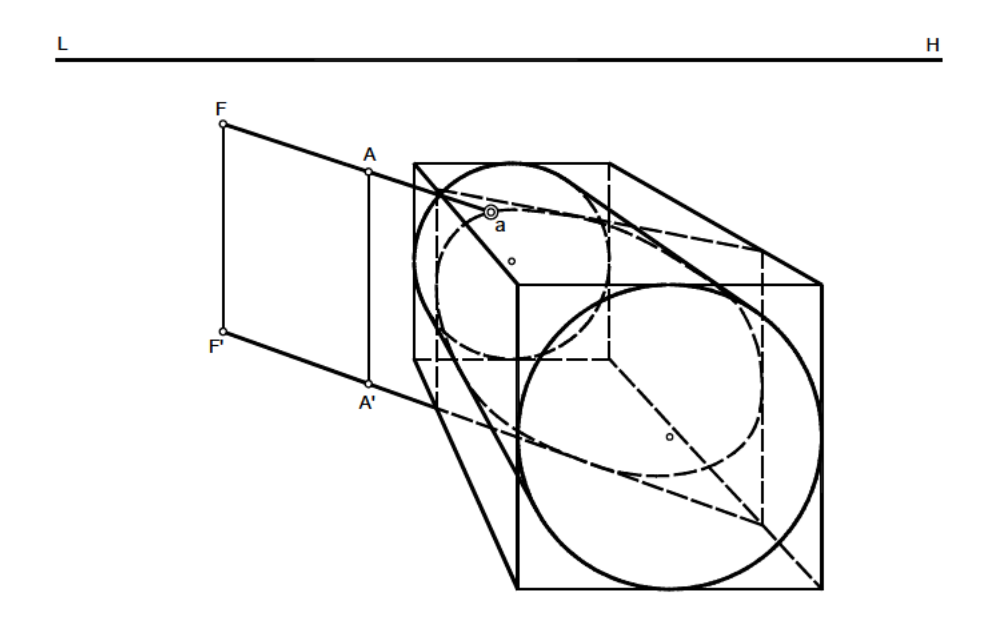
El rectángulo (mnpq) es la intersección del plano lumínico con el sólido. AS se corta con pq en la sombra (a).



18.1.5. *Sombra sobre una superficie cilíndrica*

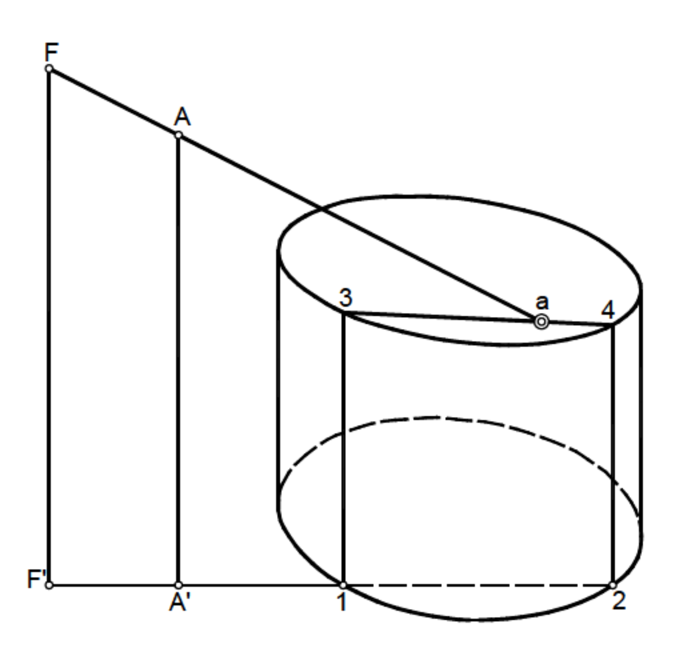
Con el fin de facilitar la obtención de la intersección del plano lumínico con la superficie cilíndrica, inscribimos dicha superficie en un prisma. Ahora procedemos a obtener la intersección de la sección obtenida, una elipse, con el rayo luminoso correspondiente al punto.

Determinada la sección que en la superficie produce el plano lumínico, la prolongación de FA nos dará en ella la sombra (a) del punto A.



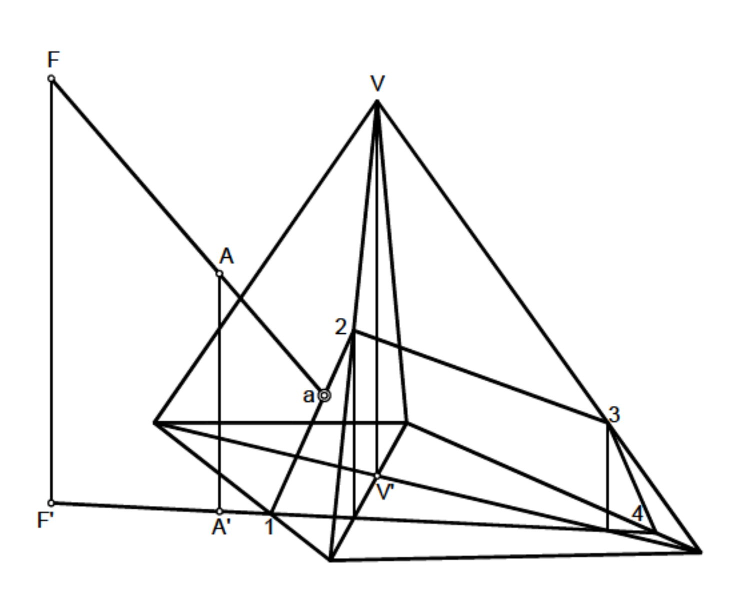
18.1.6. *Sombra sobre la base superior de un cilindro*

Hallamos la intersección del plano lumímico (utilizando la traza de dicho plano que pasa por F' y A') con el cilindro. Dicha traza corta a la base inferior del cilindro en los punto 1 y 2, correspondiendo los otros dos puntos de la sección, 3 y 4 (situados en la base superior). El rayo lumínico FA corta a 34 en el punto (a), sombra producida.



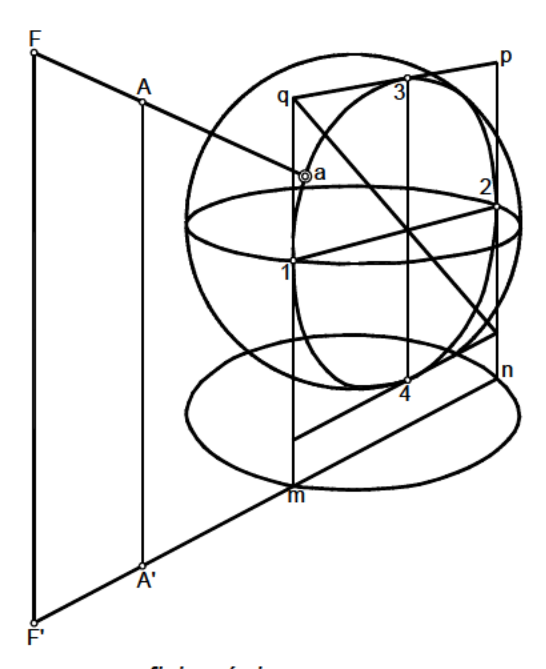
18.1.7. *Sombra sobre una superficie piramidal*

Siendo la traza del plano lumínico la recta que pasa por los puntos F' y A' , obtenemos la sección que produce este plano a la pirámide empleando dicha traza. La sección obtenida es la limitada por los puntos 1, 2, 3 y 4, que es interceptada por el rayo luminoso FA en el punto (a), sombra buscada, que se encuentra sobre el segmento 1-2 y este a su vez sobre la cara interceptada por el rayo luminoso.



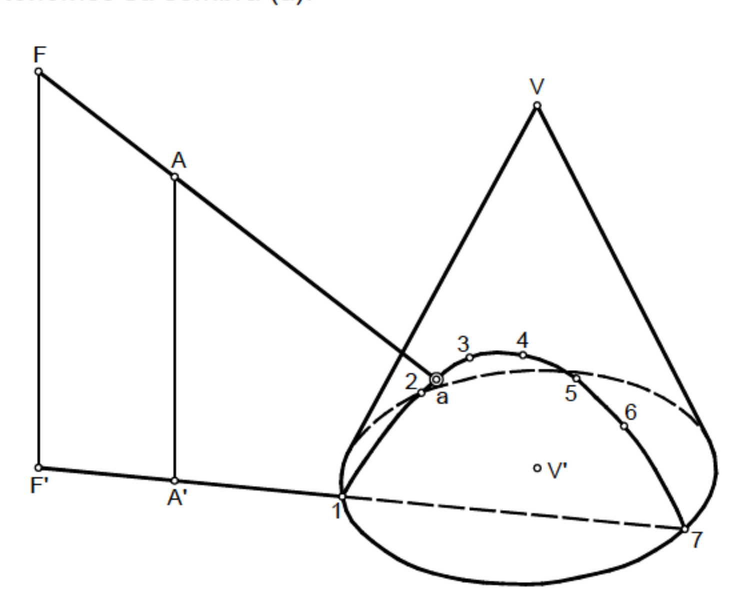
18.1.8. *Sombra sobre una superficie esférica*

Determinamos la sección que en la esfera produce el plano lumínico. Para ello hallamos los puntos m y n que son los de intersección de la traza F'A' del plano lumínico con la perspectiva de la proyección de la esfera sobre el geometral. La sección obtenida 1-2-3-4, es interceptada por el rayo luminoso FA en el punto (a), sombra del punto A sobre la superficie esférica.



18.1.9. *Sombra sobre una superficie cónica*

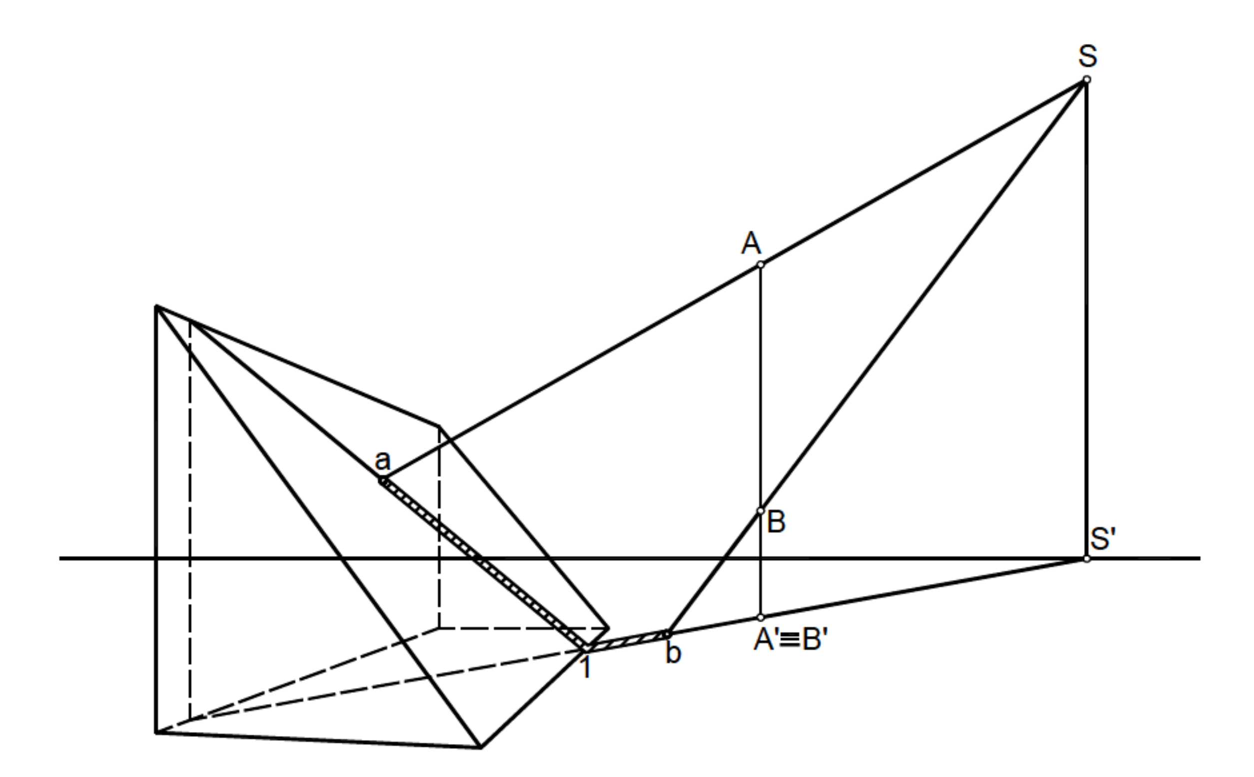
La sección que el plano lumínico produce en el cono, la obtenemos con ayuda de la traza F'A' de dicho plano, obteniendo directamente los puntos 1 y 7 de la sección que se encuentran en los puntos de corte de la base del cono con dicha traza. Obtenidos los demás puntos de la sección (2-3-4-5-6), prolongamos el rayo luminoso correspondiente al punto A (FA) y en la intersección con la sección anterior obtenemos su sombra (a).



18.2. Sombra de la recta y de curvas

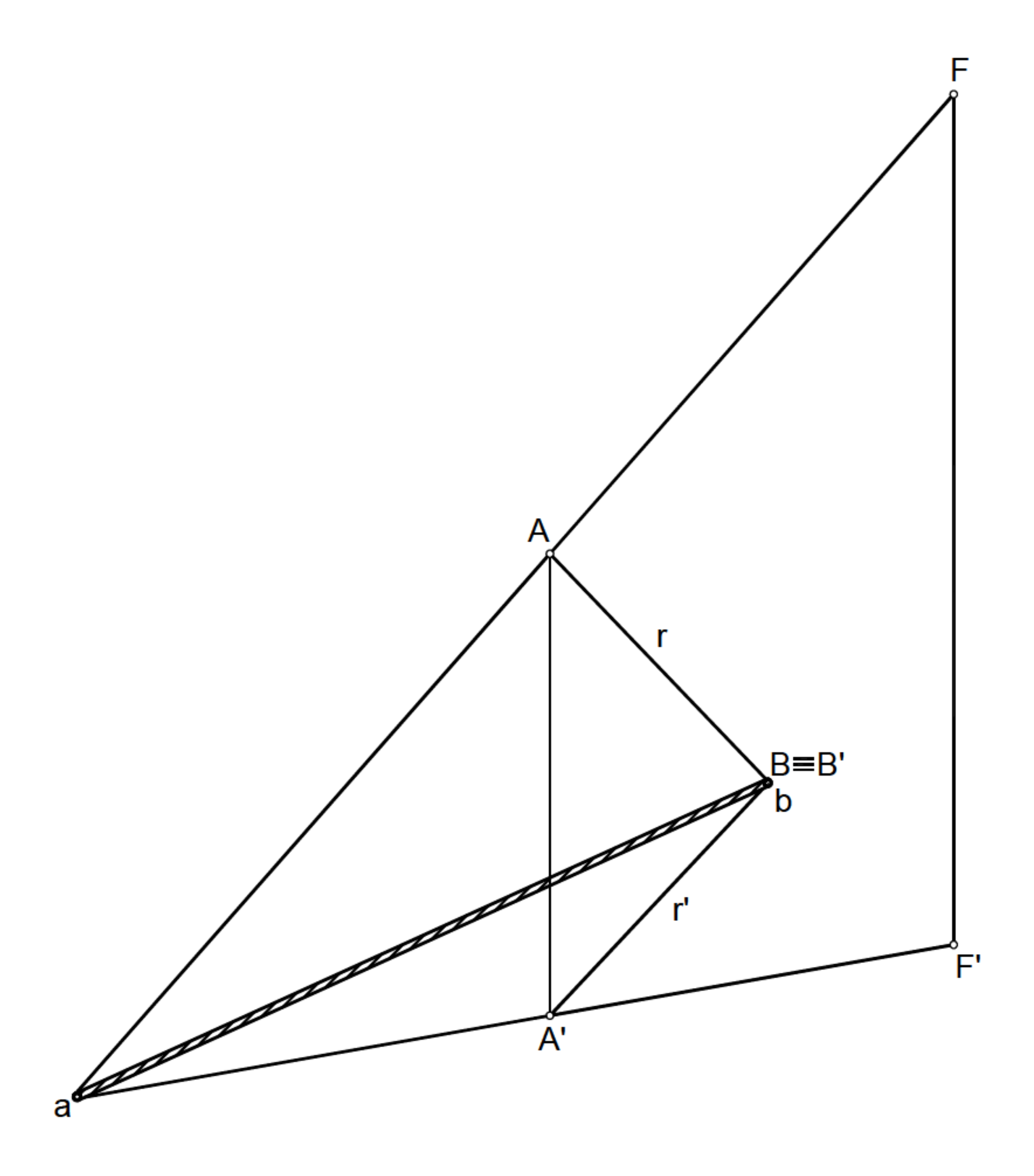
18.2.1. *Sombra de un segmento vertical sobre un plano inclinado*

Sea el segmento limitado por los puntos A-A' y B-B', determinamos la sombra de A y B. Para hallar la sombra del punto B, determinamos la intersección del rayo luminoso SB con la traza S'B', del plano lumínico, obteniendo la sombra (b). En la obtención de la sombra del punto A, y debido a que ésta se encuentra sobre un plano inclinado, hallamos primero la intersección del plano lumínico con el plano inclinado y a continuación el punto de corte del rayo luminoso correspondiente al punto A con dicha intersección, obteniendo el punto (a). Otro punto necesario para determinar la sombra de este segmento vertical, es el punto 1, obtenido en la intersección de la traza del plano lumínico que contiene al segmento vertical con la traza del plano inclinado. Uniendo los puntos obtenidos en este orden a-1-b obtenemos el segmento quebrado, sombra de un segmento vertical sobre un plano inclinado.



18.2.2. *Sombra de un segmento r, oblicuo al plano objetivo, sobre dicho plano*

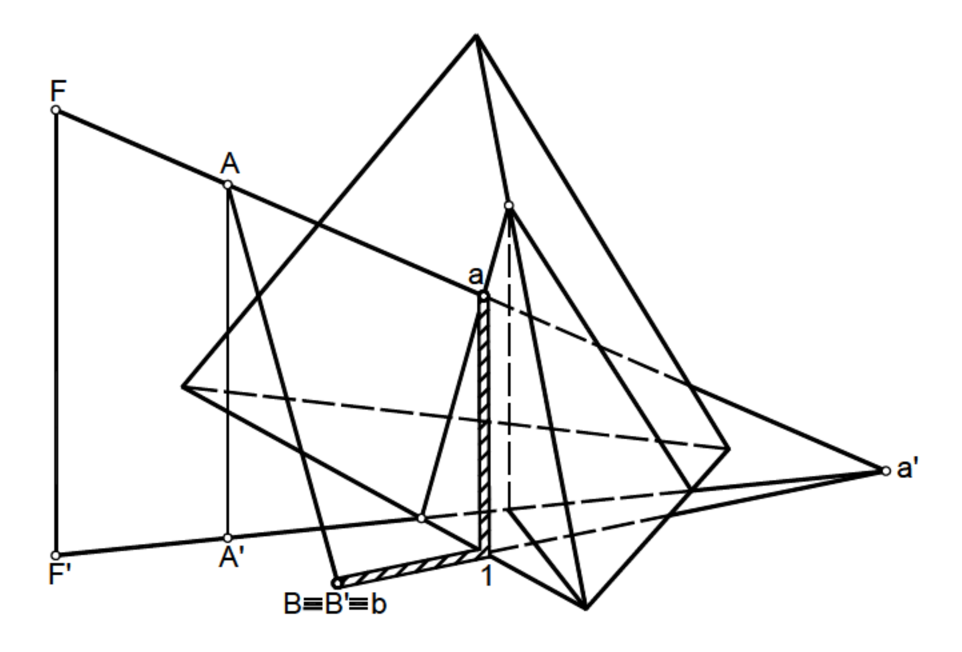
Tenemos que hallar la sombra de los extremos del segmento, puntos A y B. Como el punto B está sobre el geometral y sabemos que la sombra de un punto del plano geometral coincide consigo mismo, sólo tenemos que hallar la sombra del punto A, que se encontrará en la intersección del rayo luminoso correspondiente al punto A con la traza del plano lumínico que contiene al punto, traza A'F'. Unimos las sombras obtenidas, a y b, y obtenemos la sombra del segmento r.



18.2.3. *Segmento oblicuo, sombra sobre el objetivo y superficie piramidal*

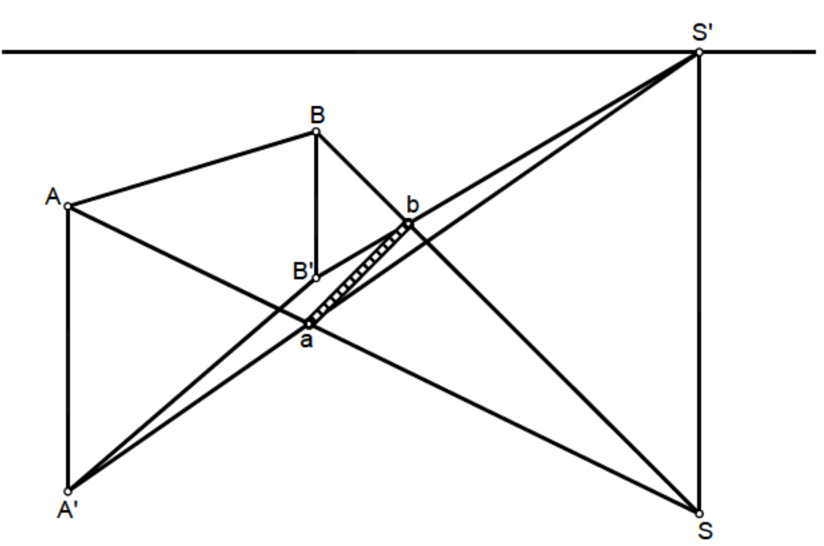
Por estar el punto B sobre el plano objetivo, coincide éste con su sombra (b). Hallamos a continuación la sombra del punto A sobre el objetivo, que se encuentra en la intersección del rayo luminoso y la traza F'A' del plano lumínico (a'). Para hallar la sombra del punto A sobre la pirámide, primero obtenemos la sección que produce el plano lumínico del punto A a la superficie piramidal y luego la intersección con dicha sección del rayo FA, obteniendo la sombra (a).

A continuación hallamos el punto de corte de la sombra ba' con la base de la pirámide, punto 1, que es el punto de quiebro de la sombra, por lo que la sombra la obtenemos uniendo los puntos (a-1-b), y en ese mismo orden.



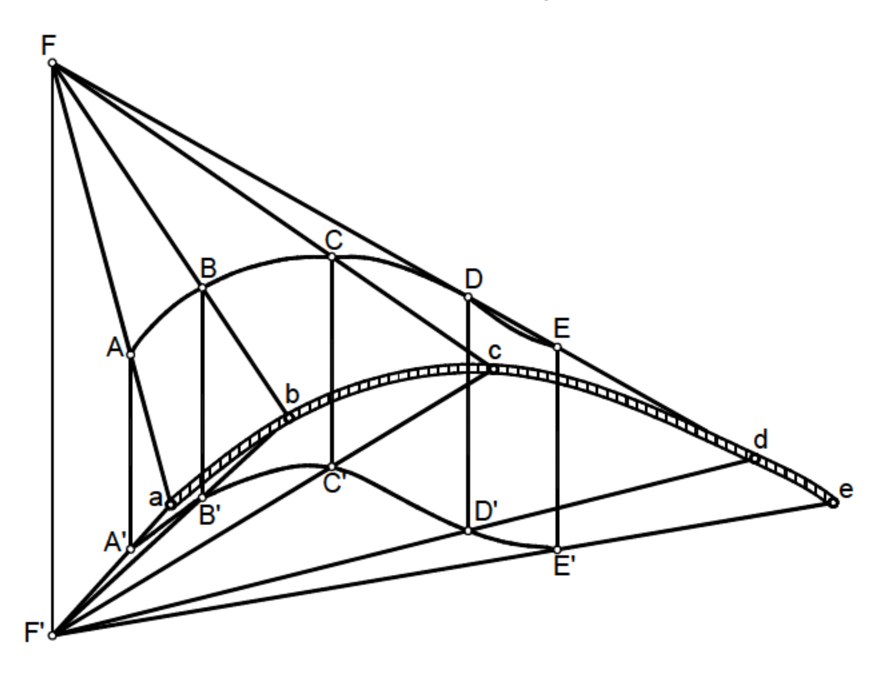
18.2.4. *Sombra de una horizontal sobre el objetivo*

Hallamos la sombra del punto A y para ello unimos A con S y A' con S' y donde se cortan ambas rectas tenemos el punto (a). Unimos B con S y B' con S' y el punto de corte, (b), de esta rectas es la sombra del punto B, siendo (ab) la sombra pedida.



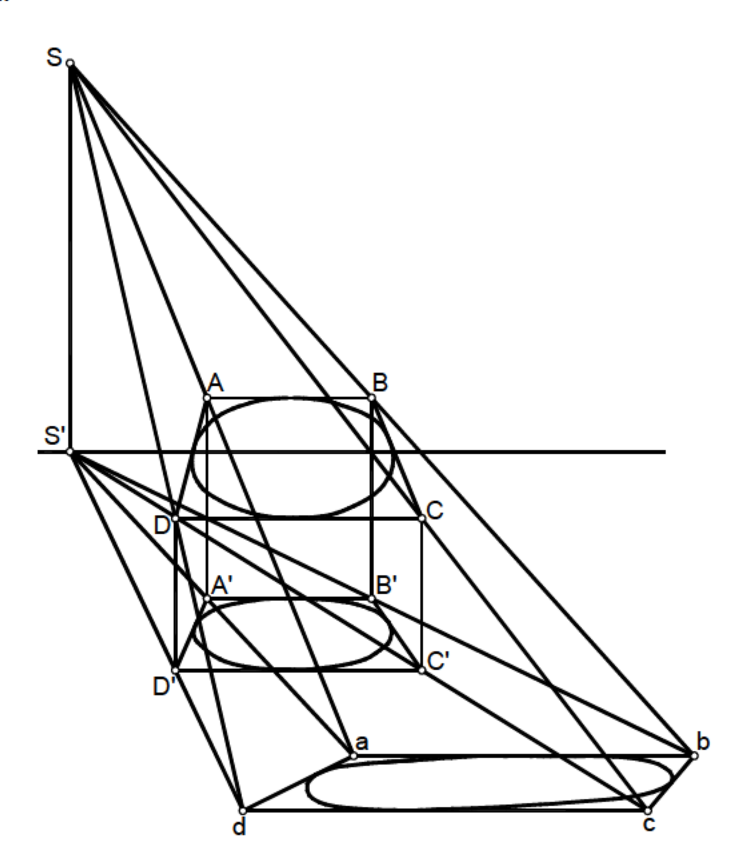
18.2.5. *Sombra de una curva sobre el objetivo*

Se obtiene uniendo las sombras de una serie de puntos tomados sobre ella.



18.2.6. *Sombra de circunferencia o elipse sobre el plano objetivo*

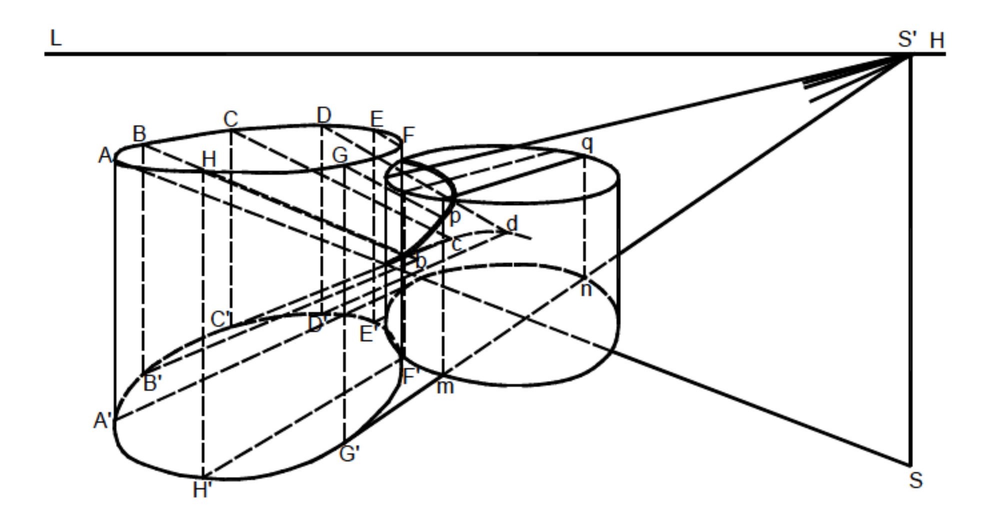
Se circunscribe un cuadrado o rectángulo. Se obtiene la sombra de éste y en él se inscribe la curva de la sombra.



18.2.7. *Sombra de un círculo sobre un cilindro*

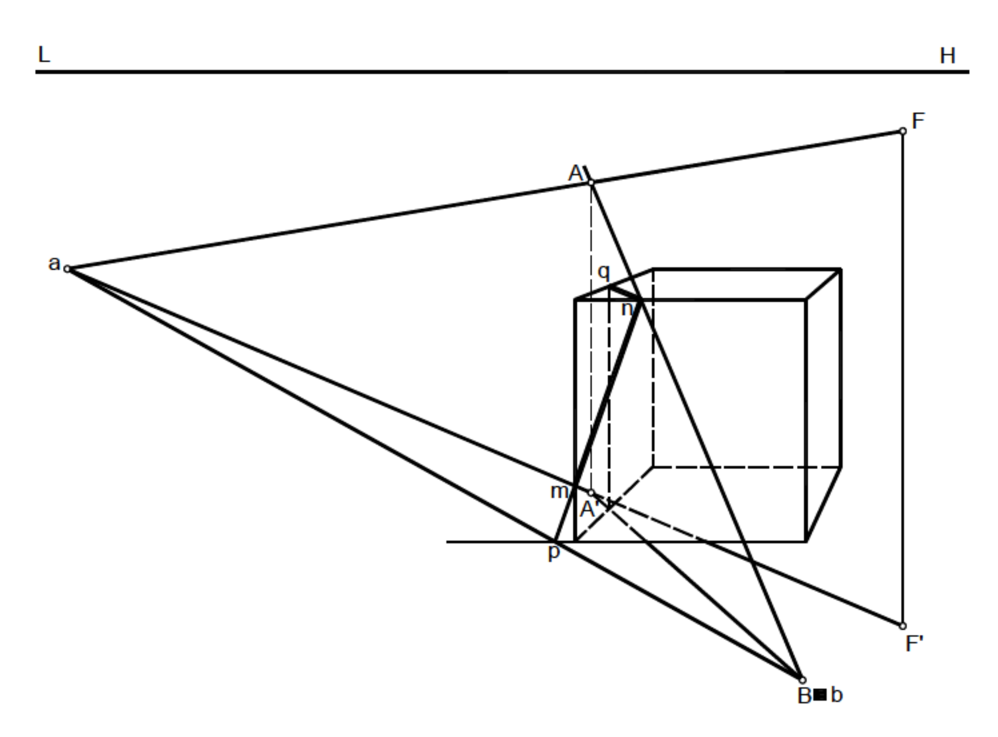
Se obtiene hallando la de varios de sus puntos. El plano lumínico del punto G, produce en el cilindro la sección (m-n-q-p), cuyos lados horizontales fugan en S'. Lo mismo se hace con el resto de los puntos, cuyas sombras uniremos consecutivamente. Sólo parte de la sombra del círculo cae sobre el cilindro, el resto, (b-c-d) cae sobre el objetivo.

Para el caso de esfera, cono, etc., la sombra que en ellos produce una curva, se obtiene de modo semejante.



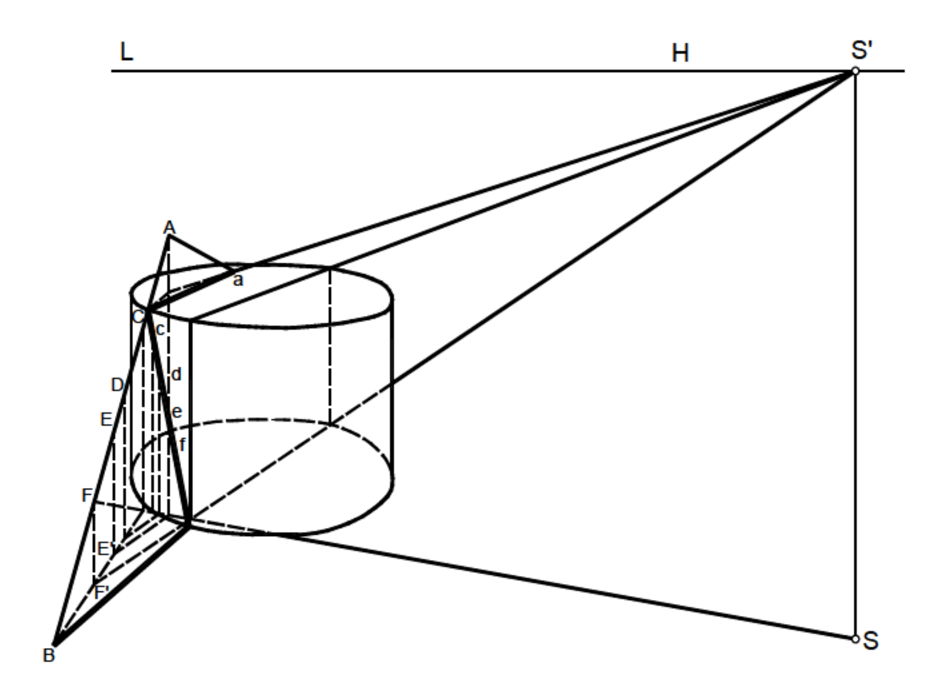
18.2.8. *Sombra de recta oblicua sobre una superficie poliédrica*

Se obtiene la sombra de la recta sobre el objetivo (ab), a la que la prolongación del lado de la base de la superficie poliédrica (en nuestro caso un cubo), corta en (p), punto que unimos con (n) al igual que (q). Así obtenemos la sombra quebrada (mnq).



18.2.9. *Sombra de una recta oblicua sobre un cilindro*

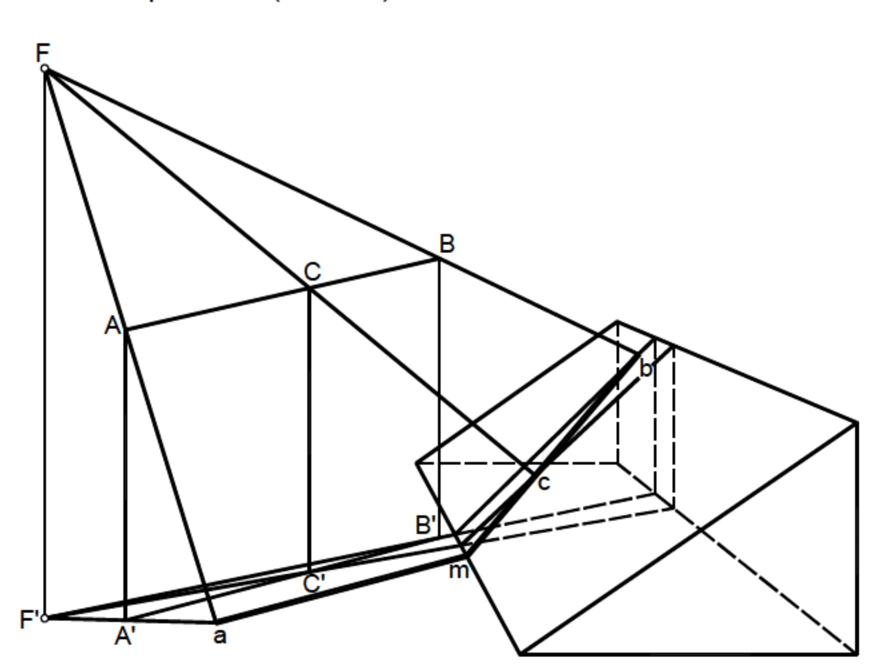
Es necesario determinar la sombra de varios de sus puntos, con objeto de determinar las partes de sombra que caen sobre: plano objetivo, superficie lateral y base superior. Resulta pues una sombra de dos puntos de quiebro.



18.2.10. *Sombra de una recta oblicua sobre el plano objetivo y plano inclinado*

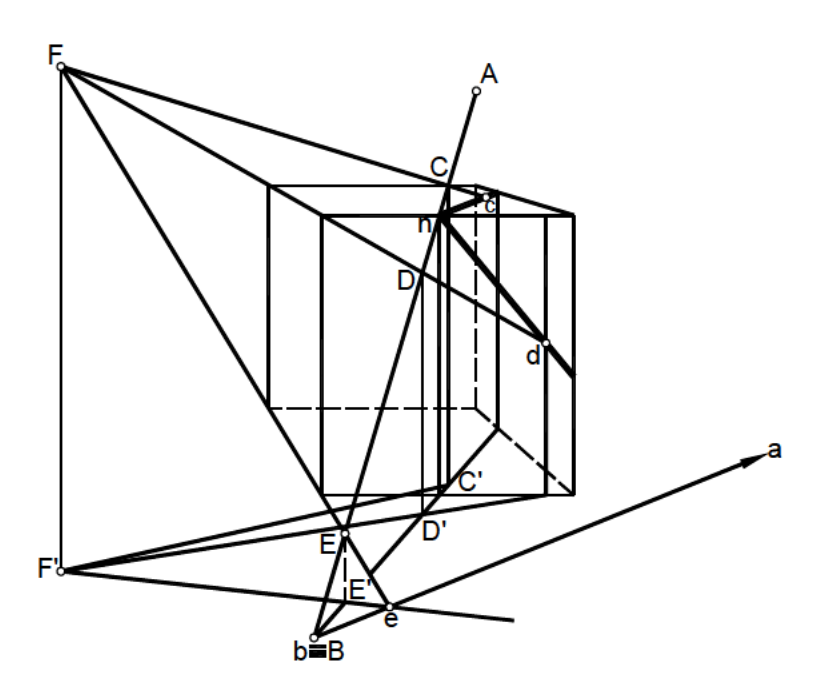
Se obtiene la sombra de A en (a), después la de un punto auxiliar C en (c) y por último la del extremo B en (b).

Se une (b) con (c), unión que corta a la traza del plano en (m), punto que unimos con (a), obteniendo así la sombra quebrada (b-c-m-a).



18.2.11. *Sombra de una recta oblicua sobre un cubo*

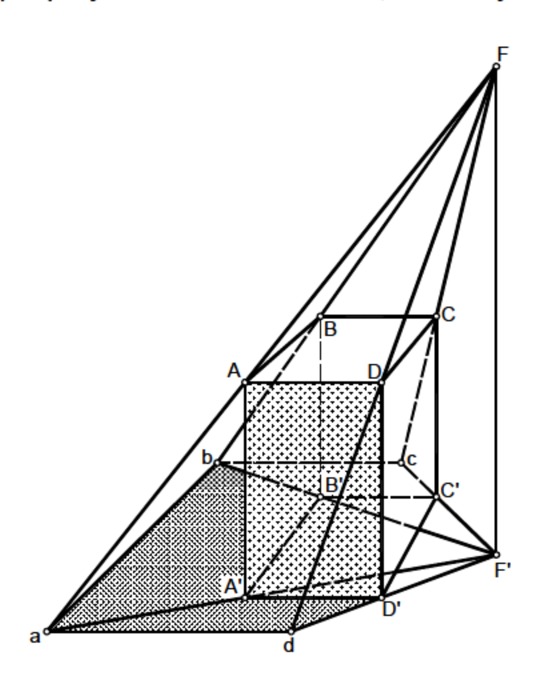
En este caso se ha supuesto la sombra de A fuera del dibujo, por lo que tomamos un punto E, que nos ayuda a conocer la dirección de a. Los puntos C y D, auxiliares, nos facilitan en (c) y (d), puntos de paso de la sombra sobre el cubo.



18.3. Sombras propias y arrojadas de los sólidos

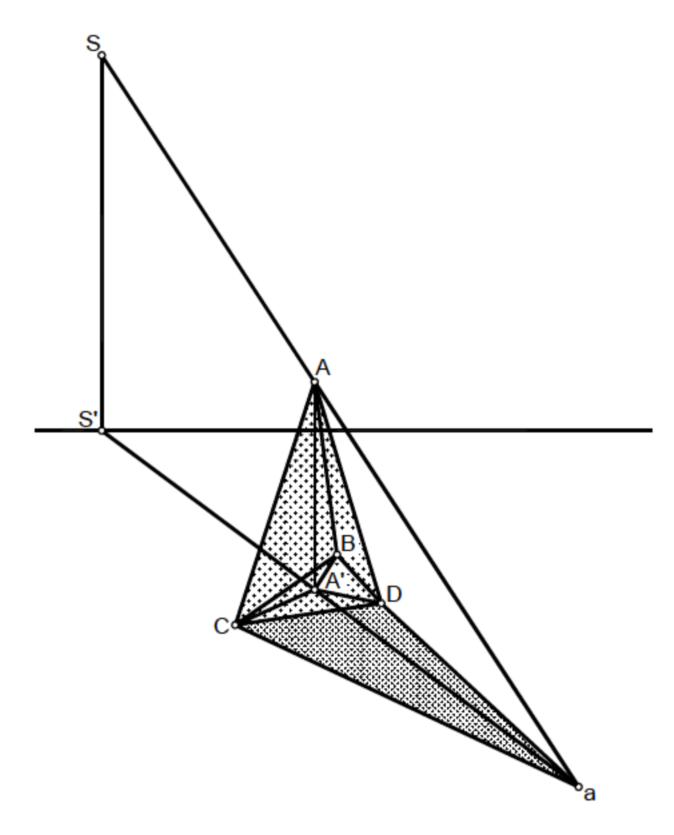
18.3.1. *De un prisma*

Buscaremos la sombra de las verticales AA', BB', CC' y DD', obteniendo los puntos a, (b), (c) y (d) que uniremos en este orden, formándose el polígono sombra que uniremos en este orden, D'dabcC'D'. No se tendrá en cuenta la parte ocupada por la base del prisma. Las sombras propias corresponden a las caras que proyectan sombra AA'BB', BB'CC' y AA'DD'.



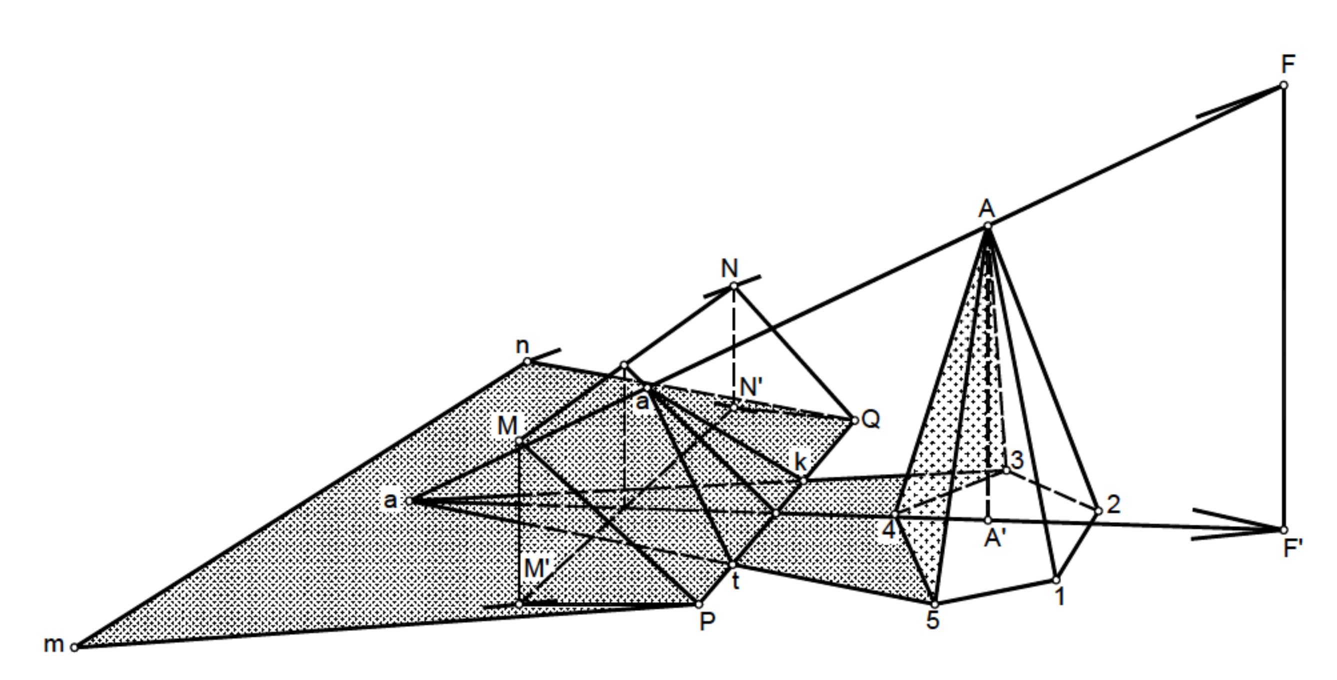
18.3.2. *De una pirámide*

Se determina la sombra de las aristas AD y AC extremas. Así se obtiene la sombra arrojada aCD. La sombra propia se encuentra sobre la cara ACD.



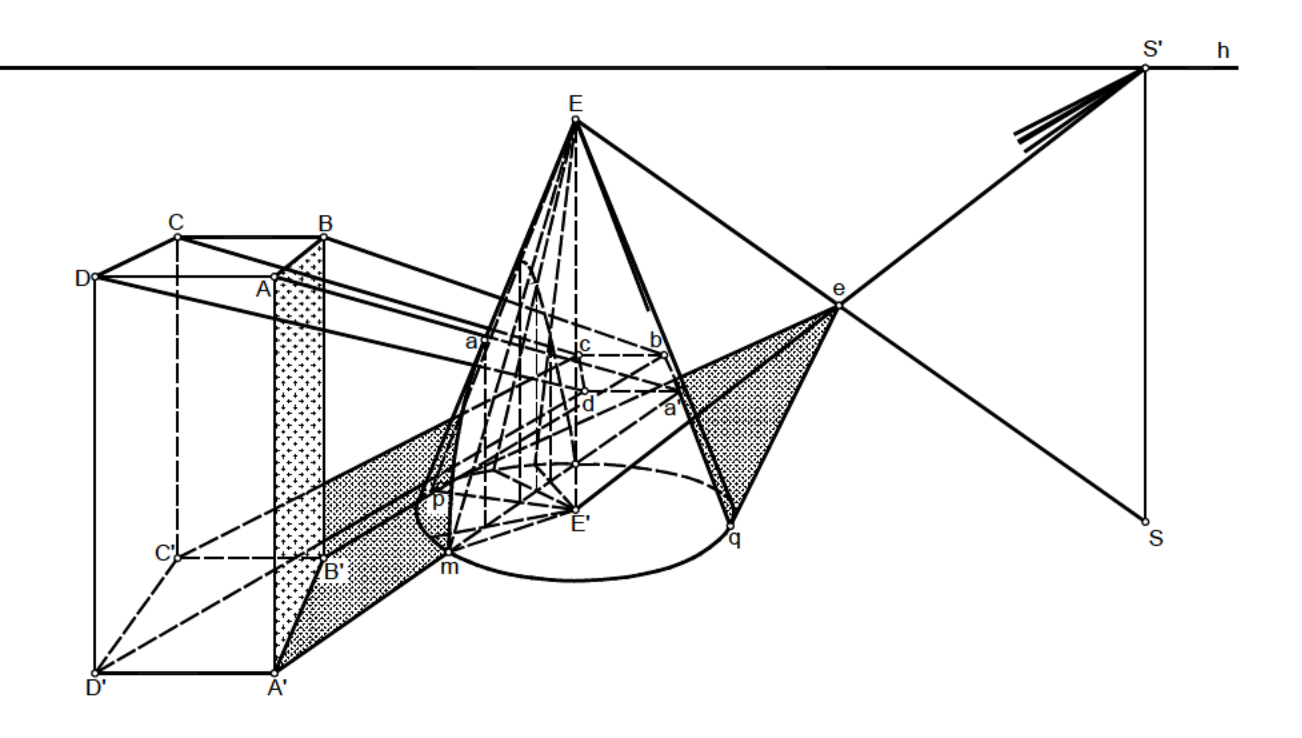
18.3.3. *De una pirámide y de un plano inclinado*

En la figura se aprecian las sombras obtenidas. Se recomienda el repaso de los casos anteriores.



18.3.4. *De prisma y cono*

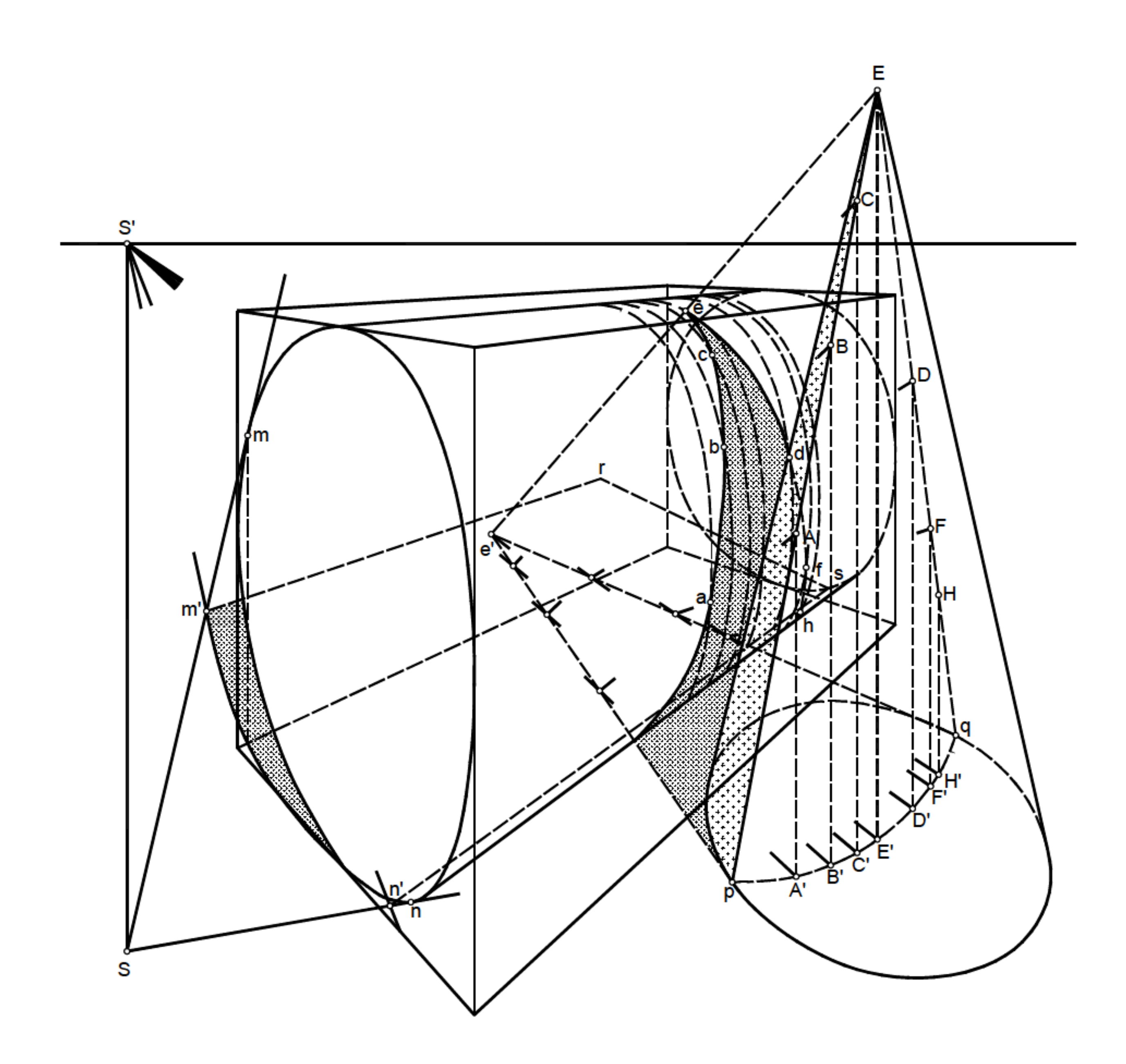
Se determina la sombra A, B, C y D. Sólo la de A cae sobre el cono, el resto en el objetivo. Para hallar la parte de la recta AB que se proyecta sobre el cono, es necesario encontrar a', punto que uniremos con A', determinando m en la base del cono. Para determinar la sombra arrojada por el cono, se determina la de E, desde el que se trazan las tangentes ep y eq, limitando entre ellas la sombra arrojada. Los puntos p y q unidos con E nos proporcionan los límites de la sombra propia.



18.3.5. *De cono y cilindro*

Se determina la sombra que E, produce (e) sobre el cilindro y (e') sobre el objetivo, desde esta última las tangentes e'p y e'q, nos limitan la sombra del cono sobre el objetivo. Para determinar la que arroja sobre el cilindro se marcan varios puntos sobre las generatrices Ep y Eq, A, B, C, D, F, H a los que se les hallará la sombra.

Para determinar la sombra arrojada del cilindro se buscan las de los círculos de las bases, por medio de los cuadrados que las circunscriben, trazando luego las tangentes exteriores a las curvas obtenidas; dichas tangentes serán paralelas a las generatrices. La sombra arrojada será la línea m'rsn'. Los límites de su sombra propia se encontrarán trazando desde S las tangentes Sm y Sn, y después las generatrices correspondientes a los puntos de tangencia m y n.



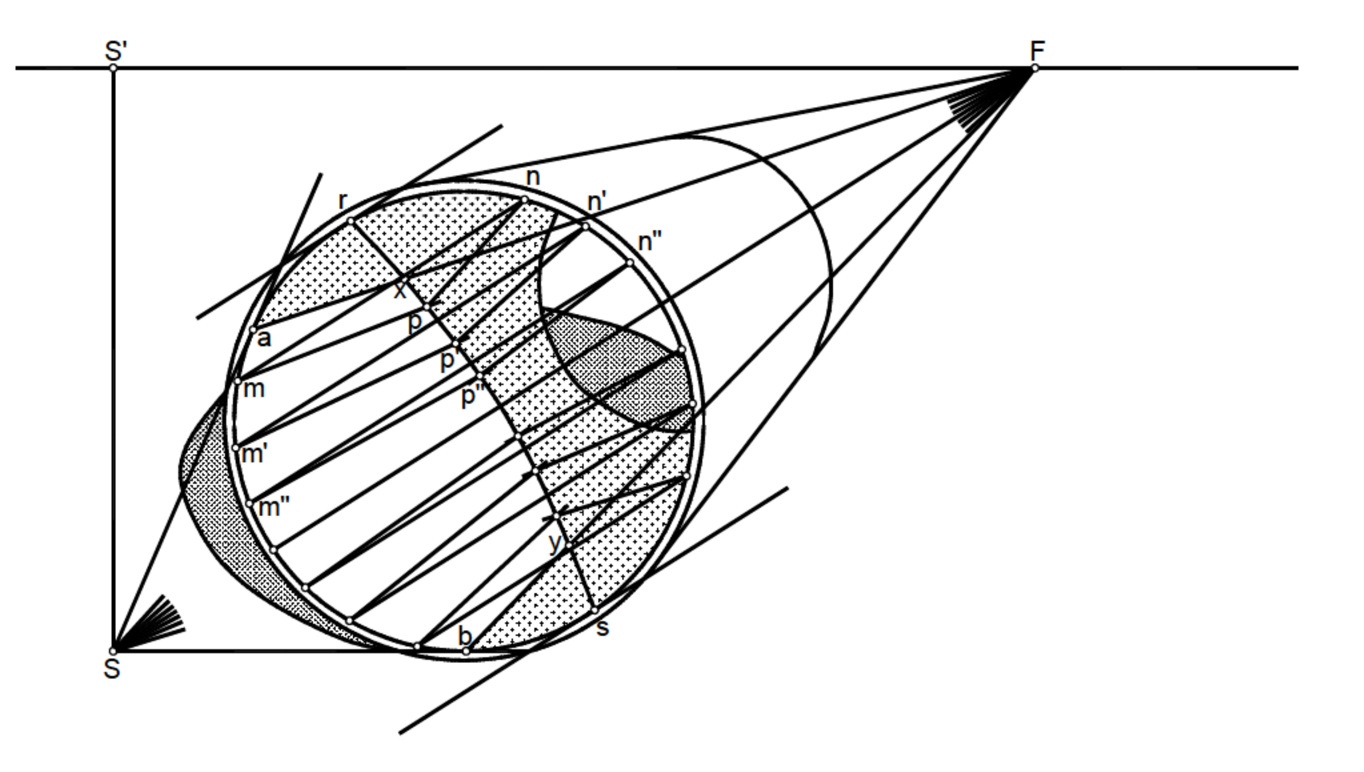
18.3.6. *De un tubo cilíndrico*

18.3.6.1. Estando las bases de frente

Se trazan en la más próxima al cuadro, varias paralelas mn, m'n', m"n", etc. a la recta SF.

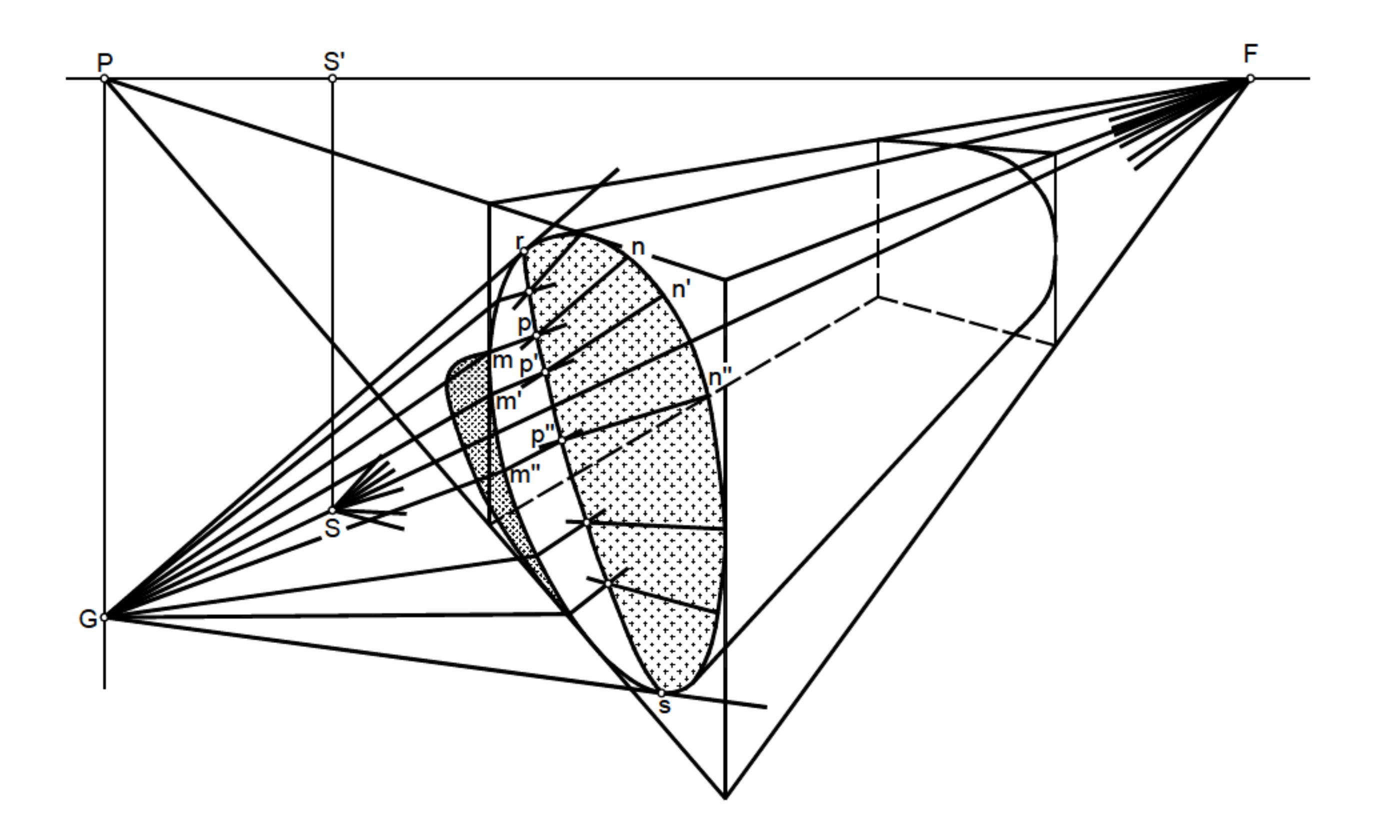
Desde sus extremos m' y n' se trazan uniones con F y S respectivamente obteniendo en sus cortes puntos p', límites de la sombra. Sus extremos r y s los obtenemos como puntos de tangencia de las tangentes trazadas paralelas a SF.

Desde el punto S se trazan tangentes cuyos puntos de tangencia unimos con F, uniones que cortan en los puntos X e Y a la línea de sombra anteriormente obtenida. Los nuevos límites de la sombra interior serán axyb. La arrojada se obtiene repitiendo procedimientos anteriores.



18.3.6.2. Cuando las bases no están de frente

Se une F con S hasta su intersección en G con la traza de fuga de la base. Desde G se trazan rectas que corten a la base mn, m'n' , etc. Los puntos m y n se unen con F y S respectivamente, uniones que se cortan en el punto p, de la misma forma p', p", etc. Los límites r y s, los hallaremos como puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde G a la curva.



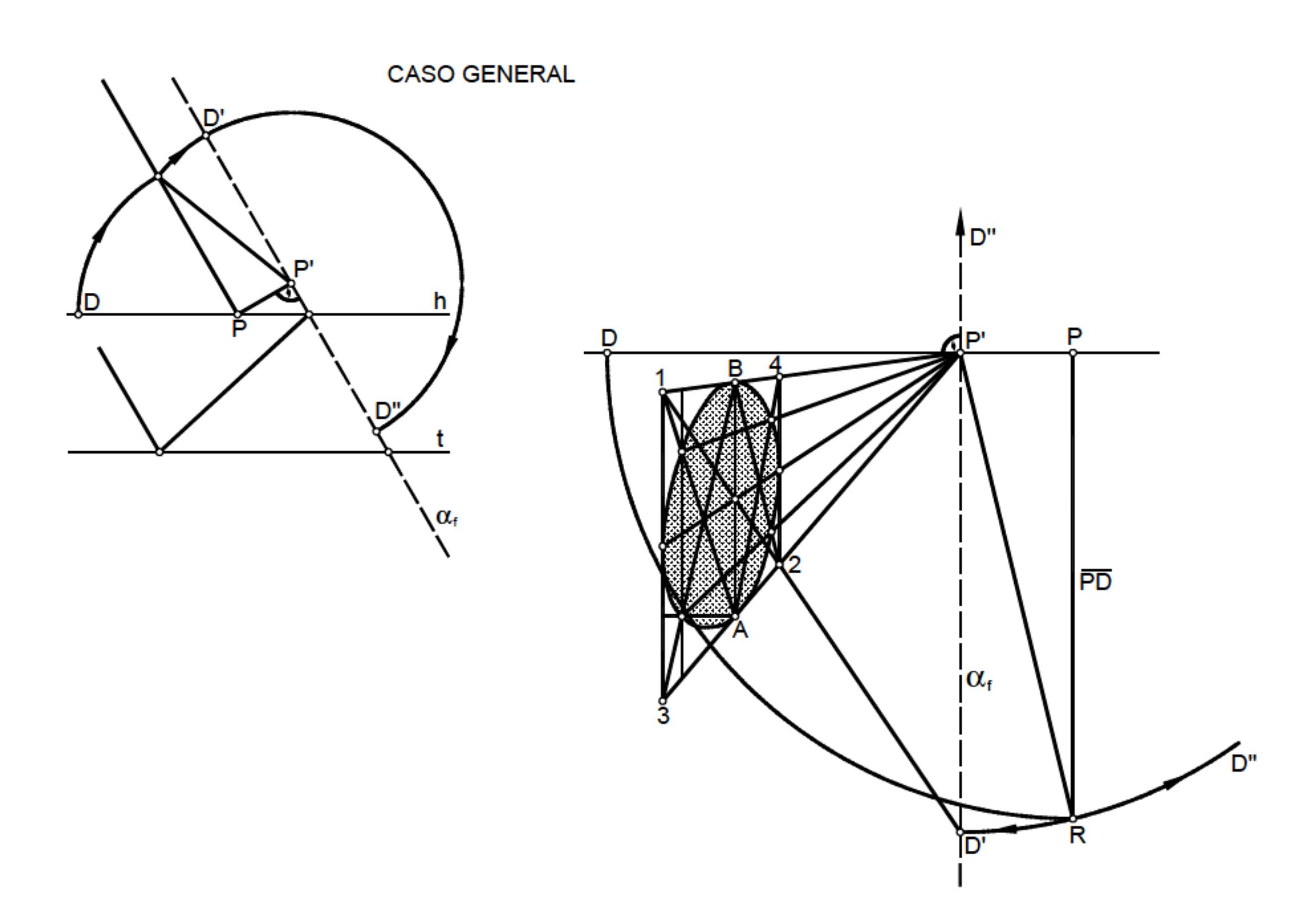
18.3.7. *De una esfera*

Antes de pasar a la explicación de la obtención de la sombra propia y arrojada de una esfera, procedemos a estudiar unos dibujos auxiliares.

18.3.7.1. Forma de obtención de un círculo cuando se conoce: El diámetro AB y la traza de fuga del plano que lo contiene

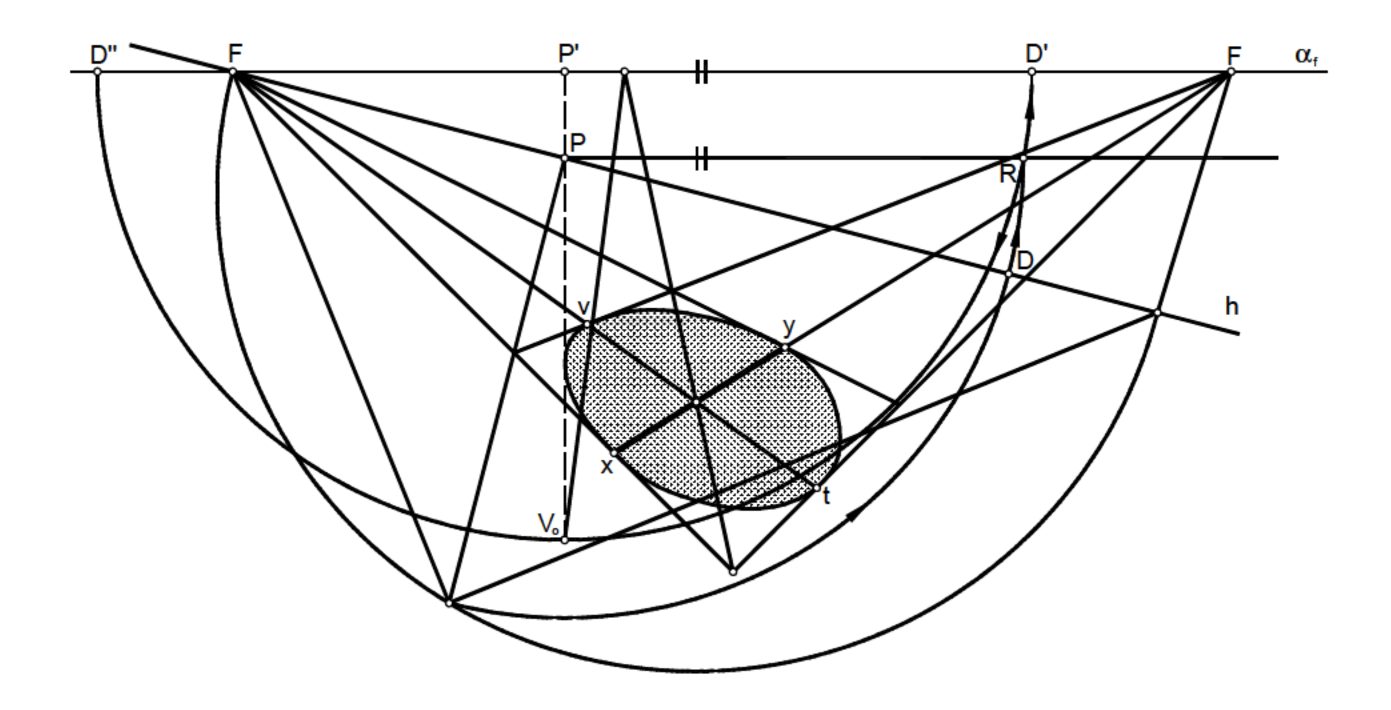
Sea la recta AB y la traza de fuga α_f. Se determinarán en primer lugar los puntos P' y D'. Para lo cual, trazaremos una perpendicular a la traza α_f, desde P, obteniendo P' y una paralela a α_f sobre la que llevaremos la distancia PD, que, trasladaremos después la distancia P'R sobre α_f, obteniendo D'. Así determinaremos siempre los puntos de distancia (D', D") sobre una traza de fuga.

Luego por los puntos A y B se trazarán las rectas de fuga que concurren en P' y por el punto medio de AB se hará pasar la unión con D' obteniendo los puntos 1 y 2 que unidos con P' nos posibilita la obtención de los puntos 3 y 4. Se obtiene así el cuadrado circunscrito El resto de los trazados es de fácil comprensión.



18.3.7.2. Forma de obtención del círculo xtyv conocido el diámetro xy

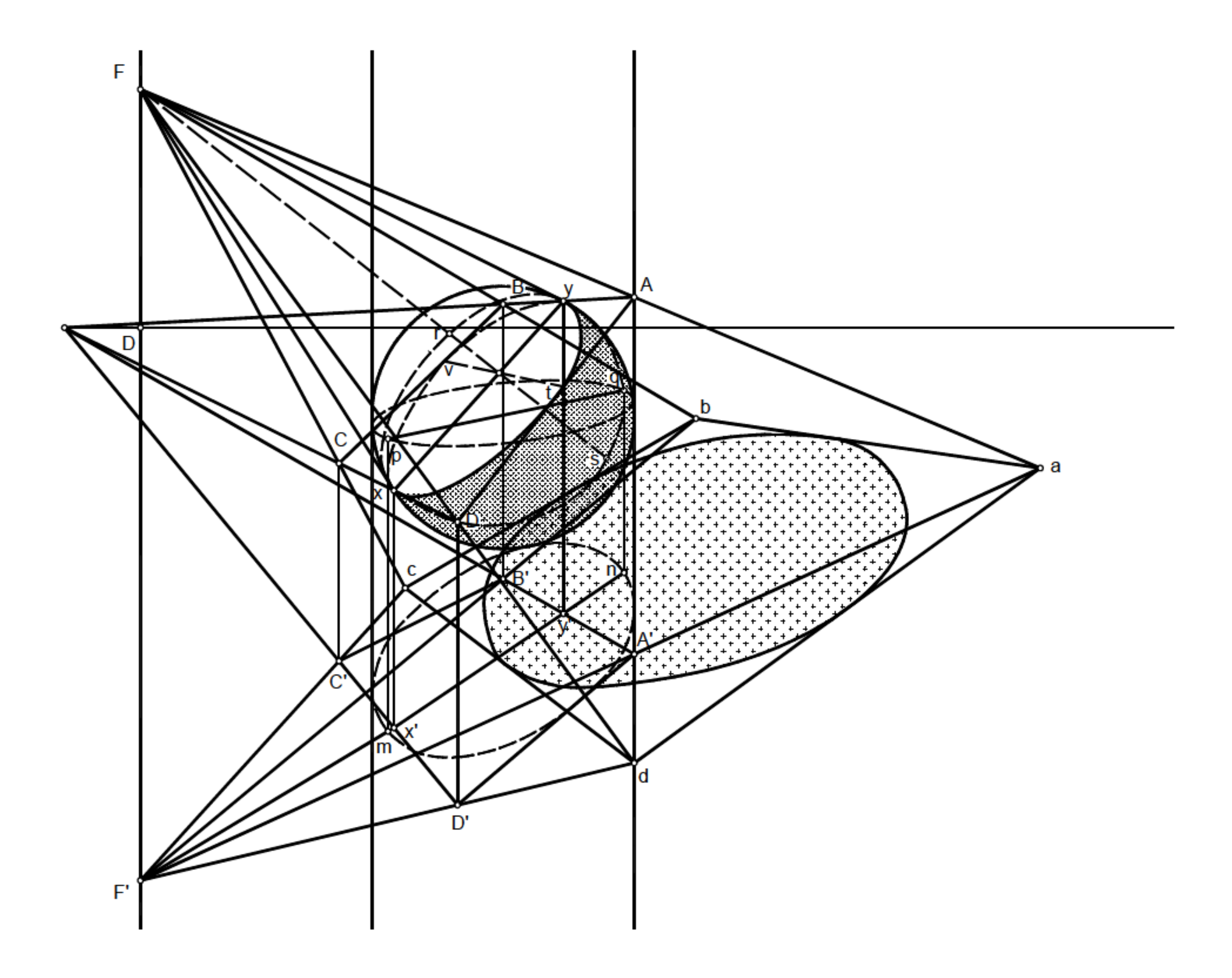
Mismo método de la figura anterior.



18.3.7.3. Sombra propia y arrojada de una esfera

Para obtener la sombra propia y arrojada de una esfera procederemos de la siguiente forma:

Desde F' se traza una recta que pase por el centro de la proyección de la esfera, cortándola en los puntos m y n, desde los que se levantan verticales que en su intersección con el círculo máximo horizontal, determinarán los puntos p y q. Tomando pq como diámetro se traza el círculo vertical prqs (ver figura auxiliar) el cual estará situado en el plano que pasando por F, corta diametralmente a la esfera. Por F se trazan dos tangentes a este círculo siendo x e y los puntos de tangencia; xy es el diámetro de la circunferencia que constituye la línea límite de la sombra, dicho círculo es el xtyv, cuya construcción completa se realiza en una figura auxiliar de la página anterior. La sombra arrojada se obtiene, hallando en primer lugar la de los puntos A, B, C y D, para ello se proyectan los puntos x e y. Obtenidos x' e y', se trazan líneas de fuga dirigidas hacia el mismo punto que CD y AB; estas líneas en sus intersecciones con las verticales de A, B, C y D nos proporcionan las proyecciones A', B', C' y D'. Hallamos a, b, c y d vértices del cuadrilátero que circunscribe a la sombra arrojada.



18.4. Grados de intensidad de luces y sombras

Para dar una idea exacta de la forma y situación de los objetos, es necesario dar a las superficies iluminadas o sombreadas, diferentes grados de intensidad.

Son varias las circunstancias que contribuyen a dar a las superficies matices variables:

1º.- La dirección de los rayos luminosos con respecto a las superficies Iluminadas.
2º.- La distancia e intensidad del foco luminoso.
3º.- La situación del observador.
4º.- La influencia de la atmósfera.
5º.- Los reflejos de cuerpos próximos.

De todas estas circunstancias y de su observación, se desprenden una serie de reglas que deben aplicarse a las perspectivas.

1. Cuanto más oblicuamente lleguen los rayos luminosos a una superficie, menor será la luz recibida por ésta.

2. La intensidad de la luz recibida por un objeto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa del foco luminoso.

3. Las superficies de cuerpos brillantes presentan mayor intensidad en su iluminación que las de los cuerpos mates.

4. Los matices más o menos oscuros en los colores, deben quedar reflejados en la perspectiva, sombreando con mayor intensidad a los oscuros.

5. En superficies sombreadas habrá que determinar el punto o línea brillante aparente, practicando después la adecuada degradación desde él hasta la línea de separación de luz y sombra.

6. La intensidad de una sombra puede quedar modificada por la proximidad de un cuerpo iluminado que refleje parte de su luz y color.

7. Para una superficie de fuga, la parte que se halla más próxima al observador tiene la luz más intensa, y la sombra más oscura que la situada a una mayor distancia de él.

8. Una línea que separe dos superficies iluminadas o dos superficies sombreadas es más clara que dichas superficies. Pero si separa una superficie iluminada de otra sombreada, es más oscura que ésta.

9. La sombra arrojada ha de ser tanto más débil cuanto mayor sea la extensión que ocupe, disminuyendo su intensidad a medida que se aleja del cuerpo que la proyecta.

10. Si el cuerpo iluminado y aquel en el que se proyecta la sombra, son de tonos equivalentes, la sombra arrojada es más fuerte que la propia.

Todas estas escuetas reglas deben tenerse presentes al realizar un acabado de sombra sobre una perspectiva, su dominio dependerá en muchos casos de su práctica y en las manos de las cualidades interpretativas del dibujante.

Existen diferentes técnicas de realización del sombreado: A lápiz, plumilla, rotulador, rayado, tramado, etc. , cuya aplicación dependerá del tipo de trabajo que se este realizando.

En el Dibujo Industrial y de Construcción los efectos de sombra se consiguen mediante rayados de paso más o menos cerrado, que puede hacerse de paso variable cuando se quiera insinuar variación de intensidad. También se utilizan tramas rayadas o punteadas con las que se consigue un oscurecimiento convencional de tanto por ciento fijado y otras de sombreado progresivo. Tanto unas como otras de representación perfecta, son comerciales y están impresas sobre papel transparente adhesivo. Resaltar por último la utilización actual de programas informáticos los cuales disponen de órdenes, patrones, escalas, etc. para realizar el sombreado.

ÍNDICE GENERAL

Segunda Parte: SISTEMA DE PERSPECTIVA CABALLERA

Tercera Parte: SISTEMA DE PERSPECTIVA CÓNICA



Material Didáctico: Ingenierías, 17